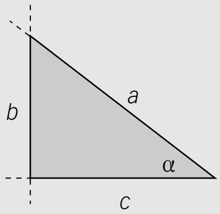
DISTINGUIR LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Nombre: Curso: Fecha:

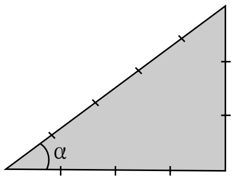
Dado un triángulo rectángulo, definimos las **razones trigonométricas** de uno de sus ángulos agudos α:



seno	coseno	tangente
$sen\ \alpha = \frac{b}{a}$	$cos\ \alpha = \frac{c}{a}$	$tg\ \alpha = \frac{b}{c}$
(cateto opuesto dividido entre hipotenusa)	(cateto contiguo dividido entre hipotenusa)	(cateto opuesto dividido entre cateto contiguo)

EJEMPLO

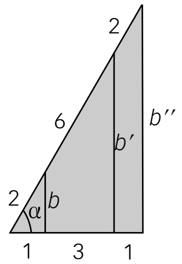
Determina las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo de la figura.



$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ $cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ $tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$

ACTIVIDADES

1 Completa las igualdades y comprueba que las razones trigonométricas son independientes del tamaño del triángulo elegido.



Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos de menor a mayor tamaño, hallamos b, b' y b'':

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

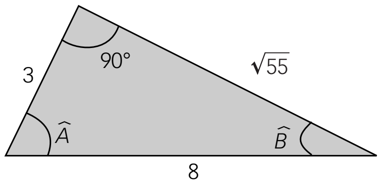
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$sen\ \alpha = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $sen\ \alpha = \frac{b'}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} =$ $sen\ \alpha = \frac{b''}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{10} =$

$cos\ \alpha = \frac{c'}{a'} = \frac{\quad}{\quad}$ $cos\ \alpha = \frac{c'}{a'} = \frac{\quad}{\quad} =$ $cos\ \alpha = \frac{c''}{a''} = \frac{\quad}{\quad} =$

$tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $tg\ \alpha = \frac{b'}{c'} = \frac{4\sqrt{3}}{4} =$ $tg\ \alpha = \frac{b''}{c''} = \frac{\quad}{\quad} =$

2 Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$.



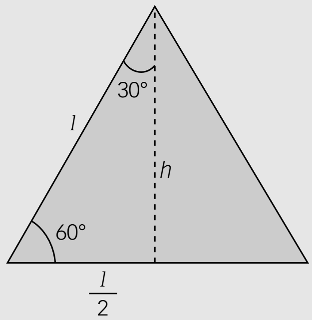
CALCULAR LAS RAZONES DE LOS ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60°

Nombre: Curso: Fecha:

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° se deducen a partir de un triángulo equilátero de lado l.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos su altura:

$$h^2 = l^2 - (l/2)^2 = l^2 - l^2/4 = 3l^2/4 \rightarrow h = l \cdot \sqrt{3}/2$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad ctg\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l/2} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

ACTIVIDADES

1 **Deduce las razones trigonométricas del ángulo de 30° a partir del triángulo equilátero anterior.**

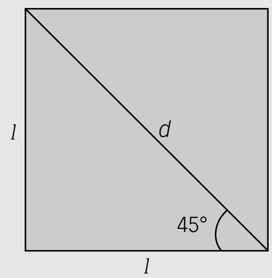
Las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2};\ cos\ 30° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \underline{\qquad};\ tg\ 30° = \frac{l/2}{l \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \underline{\qquad}$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45° se deducen a partir de un cuadrado y su diagonal.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la diagonal:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \rightarrow d = l \cdot \sqrt{2}$$



Las razones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

2 **Completa la tabla con las razones trigonométricas de ángulos notables.**

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
sen	0	—	—	—	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	0	-1		1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe	0	no existe	0

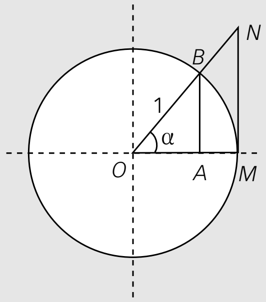
HALLAR RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

Nombre: Curso: Fecha:

La circunferencia goniométrica o círculo unitario es una circunferencia de radio la unidad.

Sobre dicha circunferencia, el valor del seno coincide con $\overline{AB}$ y el coseno con $\overline{OA}$.

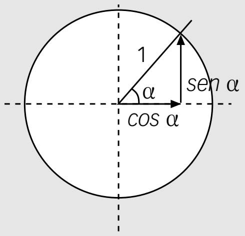
$$sen\ \alpha = \frac{AB}{1} = AB \qquad cos\ \alpha = \frac{OA}{1} = OA$$



La tangente coincide con el segmento *MN*, que es tangente a la circunferencia, ya que:

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MN}}{1} = \overline{MN}$$

En el primer cuadrante:

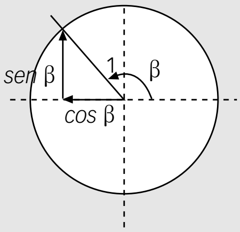


$sen\ \alpha > 0$

$cos\ \alpha > 0$

$tg\ \alpha > 0$

En el segundo cuadrante:

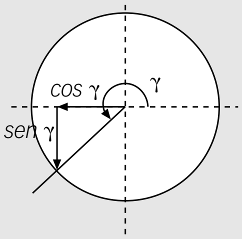


$sen\ \beta > 0$

$cos\ \beta < 0$

$tg\ \beta < 0$

En el tercer cuadrante:

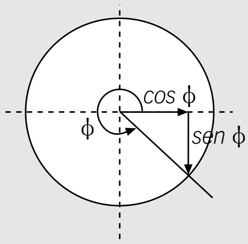


$sen\ \gamma < 0$

$cos\ \gamma < 0$

$tg\ \gamma > 0$

En el cuarto cuadrante:



$sen\ \phi < 0$

$cos\ \phi > 0$

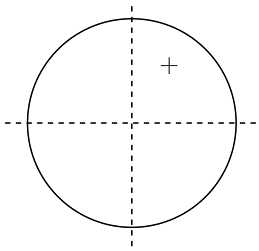
$tg\ \phi < 0$

ACTIVIDADES

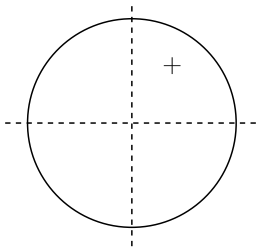
1 Completa la siguiente tabla con los signos que correspondan a las razones trigonométricas indicadas.

	40°	70°	110°	210°	300°
sen	+				
cos	+				
tg	+				

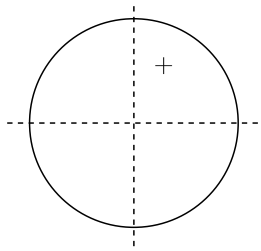
2 Escribe, para cada cuadrante, el signo del seno, el coseno y la tangente.



seno



coseno



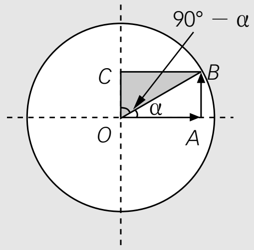
tangente

7 REPASO Y APOYO — OBJETIVO 4

RELACIONAR LAS RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

Nombre: ______ Curso: ______ Fecha: ______

Ángulos **complementarios** son aquellos cuya suma vale 90°.



El cateto opuesto al ángulo de 90° − α (*BC*) es igual al cateto contiguo a α (*OA*): $\textbf{\textit{sen}}\ \mathbf{(90° - \alpha) = \textbf{\textit{cos}}\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de 90° − α (*OC*) es igual al cateto opuesto a α (*AB*): $\textbf{\textit{cos}}\ \mathbf{(90° - \alpha) = \textbf{\textit{sen}}\ \alpha}$

$$\textit{tg}\ (90° - \alpha) = \frac{\textit{sen}\ (90° - \alpha)}{\textit{cos}\ (90° - \alpha)} = \frac{\textit{cos}\ \alpha}{\textit{sen}\ \alpha} = \frac{1}{\textit{tg}}$$

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo α = 60°, sabiendo que las razones del ángulo de 30° (60° = 90° − 30°) son:

$$\textit{sen}\ 30° = \frac{1}{2} \qquad \textit{cos}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{tg}\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

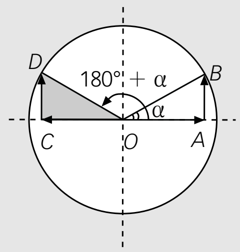
$$\textit{sen}\ 60° = \textit{cos}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{cos}\ 60° = \textit{sen}\ 30° = \frac{1}{2} \qquad \textit{tg}\ 60° = \frac{1}{\textit{tg}\ 30°} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

ACTIVIDADES

1 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75°, sabiendo que las razones de 15° son:

$$\textit{sen}\ 15° = 0{,}259 \qquad \textit{cos}\ 15° = 0{,}966 \qquad \textit{tg}\ 15° = 0{,}268$$

Ángulos **suplementarios** son aquellos cuya suma vale 180°.



El cateto opuesto al ángulo de 180° − α (*CD*) es igual al cateto opuesto a α (*AB*): $\textbf{\textit{sen}}\ \mathbf{(180° - \alpha) = \textbf{\textit{sen}}\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de 180° − α (*OC*) es el contrario del cateto contiguo a α (*OA*): $\textbf{\textit{cos}}\ \mathbf{(180° - \alpha) = -\textbf{\textit{cos}}\ \alpha}$

$$\textit{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{\textit{sen}\ (180° - \alpha)}{\textit{cos}\ (180° - \alpha)} = \frac{\textit{sen}\ \alpha}{-\textit{cos}\ \alpha} = -\textit{tg}\ \alpha$$

EJEMPLO

Obtén las razones trigonométricas del ángulo α = 120°, sabiendo que las razones del ángulo de 60° (120° = 180° − 60°) son:

$$\textit{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{cos}\ 60° = \frac{1}{2} \qquad \textit{tg}\ 60° = \sqrt{3}$$

$$\textit{sen}\ 120° = \textit{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \textit{cos}\ 120° = -\textit{cos}\ 60° = -\frac{1}{2} \qquad \textit{tg}\ 120° = -\textit{tg}\ 60° = -\sqrt{3}$$

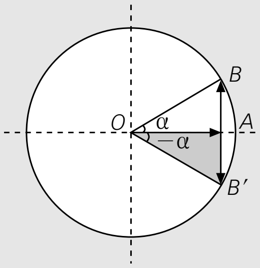
2 Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 155°, sabiendo que las razones de 25° son:

$$\textit{sen}\ 25° = 0{,}423 \qquad \textit{cos}\ 25° = 0{,}906 \qquad \textit{tg}\ 25° = 0{,}466$$

CALCULAR LAS RAZONES DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

Nombre: Curso: Fecha:

Los **ángulos opuestos** son los que miden igual, pero tienen distinto signo.



El cateto opuesto al ángulo $-\alpha$ (AB') es el contrario al cateto opuesto a α (AB): $\textbf{sen}\ (-\alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo $-\alpha$ (OA) es igual al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{cos}\ (-\alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (-\alpha) = \frac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\textbf{tg}\ \alpha$$

EJEMPLO

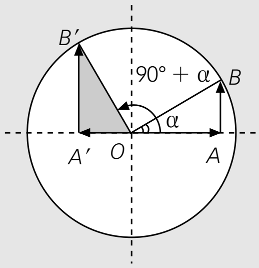
Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -20°$, sabiendo que las razones del ángulo de 20° son:

***sen* 20° = 0,342**	***cos* 20° = 0,940**	***tg* 20° = 0,364**
sen (−20°) = −*sen* 20° = −0,342	*cos* (−20°) = *cos* 20° = 0,940	*tg* (−20°) = −*tg* 20° = −0,364

ACTIVIDADES

1 Halla las razones trigonométricas del ángulo de −45°, (encuentra en la tabla del objetivo 2 las razones del ángulo de 45°).

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90°



El cateto opuesto al ángulo de $90° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto contiguo a α (OA): $\textbf{sen}\ (90° + \alpha) = \textbf{cos}\ \alpha$

El cateto contiguo al ángulo de $90° + \alpha$ (OA') es igual al contrario del cateto opuesto a α (AB): $\textbf{cos}\ (90° + \alpha) = -\textbf{sen}\ \alpha$

$$\textbf{tg}\ (90° + \alpha) = \frac{sen\ (90° + \alpha)}{cos\ (90° + \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{-sen\ \alpha} = -\frac{1}{tg}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, conociendo las razones del ángulo de 30°.

$$sen\ 120° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 120° = -sen\ 30° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -\frac{1}{tg\ 30°} = -\frac{1}{1/\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

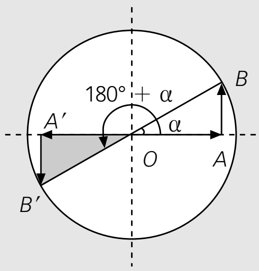
2 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 100°, sabiendo que 100° = 90° + 10°.

sen 10° = 0,174 *cos* 10° = 0,985 *tg* 10° = 0,176

CALCULAR LAS RAZONES DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

Nombre: Curso: Fecha:

ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180º



El cateto opuesto al ángulo de 180° + α (*A′B′*) es el contrario al cateto opuesto a α (*AB*): ***sen* (180° + α) = −*sen* α**

El cateto contiguo al ángulo de 180° + α (*OA′*) es igual al contrario del cateto contiguo a α (*OA*): ***cos* (180° + α) = −*cos* α**

$$\mathbf{tg\ (180° + \alpha)} = \frac{sen\ (180° + \alpha)}{cos\,(180° + \alpha)} = \frac{-sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \mathbf{tg\ \alpha}$$

EJEMPLO

Halla las razones trigonométricas del ángulo α = 240°, conociendo las razones del ángulo de 60°.

$$sen\ 240° = -sen\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 240° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 240° = tg\ 60° = \sqrt{3}$$

3 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 250°, sabiendo que:

$$sen\ 70° = 0{,}940 \qquad cos\ 70° = 0{,}342 \qquad tg\ 70° = 2{,}747$$

Ten en cuenta que 250° = 180° + 70°.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 90º: Reducción al primer cuadrante

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo superior a 90° se pueden expresar en función de las razones de otro ángulo perteneciente al primer cuadrante.

1.er caso: para ángulos del segundo cuadrante.

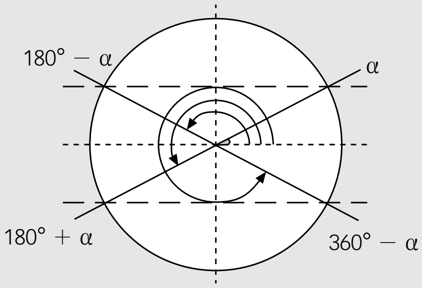
β = 180° − α

2.º caso: para ángulos del tercer cuadrante.

γ = 180° + α

3.er caso: para ángulos del cuarto cuadrante.

ε = 360° − α



4 Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

a) 135°

Como 135° pertenece al segundo cuadrante, resulta que 135° = 180° − ....

$$sen\ 135° = \text{............} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 135° = \text{............} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 135° = \text{............} = -1$$

b) 210°

Como 210° es mayor de 180°, pertenece al tercer cuadrante, pues 210° = 180° + ...

$$sen\ 210° = \text{............} = -\frac{1}{2}$$

$$cos\ 210° = \text{............} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 210° = \text{............} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

CALCULAR LAS RAZONES DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

Nombre: Curso: Fecha:

c) 330°

Como 330° pertenece al cuarto cuadrante, resulta que 330° = 360° − 30°.

$$sen\ 330° = ... = -\frac{1}{2}$$

$$cos\ 330° = ... = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 330° = ... = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d) 420°

¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de 420°? Si hacemos 420° = 360° + 60°, vemos que está situado en el primer cuadrante.

$$sen\ 420° = sen\ 60° = ...$$

$$cos\ 420° = cos\ 60° = ...$$

$$tg\ 420° = tg\ 60° = ...$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°

Si el ángulo es mayor de 360°, hay que hallar su ángulo equivalente, restando el número entero de veces que contiene a 360. Sus razones trigonométricas son iguales que las del ángulo equivalente resultante.

EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1470°$.

Dividimos 1470 entre 360:

$$1470 = 360 \cdot 4 + 30 \quad \text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}$$

$$sen\ 1470° = sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad cos\ 1470° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad tg\ 1470° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 Halla las razones trigonométricas de los ángulos.

a) 840°

Divide 840 entre 360 y expresa:

840 = 360 · .... + ...

$$sen\ 840° = sen\ .... = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 840° = cos\ .... = ...$$

$$tg\ 840° = tg\ .... = -\sqrt{3}$$

b) 3915°

Divide 3915 entre 360 y expresa:

3915 = 360 · .... + ...

$$sen\ 3915° = sen\ .... = ...$$

$$cos\ 3915° = cos\ .... = ...$$

$$tg\ 3915° = tg\ .... = ...$$

c) 1320°

Divide 1320 entre 360 y expresa:

1320 = 360 · .... + ...

$$sen\ 1320° = sen\ .... = ...$$

$$cos\ 1320° = cos\ .... = ...$$

$$tg\ 1320° = tg\ .... = \sqrt{3}$$

d) 780°

Divide 780 entre 360 y expresa:

780 = 360 · .... + ...

$$sen\ 780° = sen\ .... = ...$$

$$cos\ 780° = cos\ .... = ...$$

$$tg\ 780° = tg\ .... = ...$$

MANEJAR LAS RELACIONES ENTRE LAS RAZONES DE UN ÁNGULO

Nombre: Curso: Fecha:

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

Esta relación se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo junto con la relación que se deduce de la definición de tangente:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

Conociendo una de las razones trigonométricas de un ángulo, podemos calcular las restantes razones.

EJEMPLO

Sabiendo que $cos\ \alpha = \frac{4}{5}$, calcula el seno y la tangente de dicho ángulo.

$$sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

ACTIVIDADES

1 Sabiendo que $sen\ \alpha = 0{,}78$; halla $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

2 Dado $cos\ \alpha = 0{,}32$; obtén $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$.

EJEMPLO

Dado $tg\ \alpha = 2$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.

Llamamos $sen\ \alpha = x$ y $cos\ \alpha = y$. Las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894 = sen\ \alpha$$

$$y = cos\ \alpha = 0{,}447$$

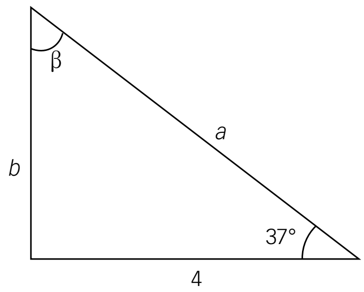
3 Sabiendo que $tg\ \alpha = 5$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$.

APLICAR LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Nombre: Curso: Fecha:

EJEMPLO

Calcula lo que miden los lados *a* y *b*, y el ángulo β del triángulo de la figura.



Como los tres ángulos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Para calcular el otro cateto, *b*, aplicamos la definición de *tg* 37° y usamos la calculadora para hallar *tg* 37°:

$$tg\ 37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

Para hallar la hipotenusa *a* podemos utilizar tres métodos:

1.º Aplicar el teorema de Pitágoras.
2.º Utilizar la definición de *sen* 37°.
3.º Usar la definición de *cos* 37°.

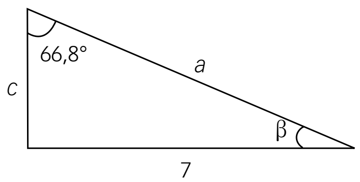
Vamos a usar el segundo método:

$$sen\ 37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

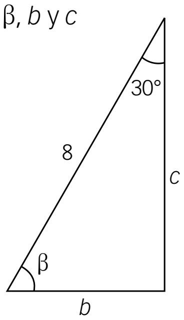
ACTIVIDADES

1 Calcula, en cada triángulo, los lados y ángulos que se indican.

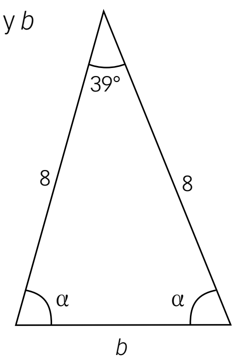
a) β, *a* y *c*



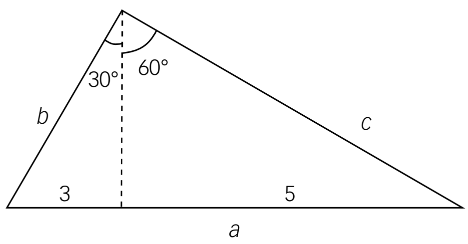
c) β, *b* y *c*



b) α y *b*

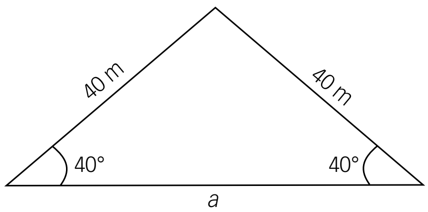


d) *a*, *b* y *c*



2 Halla el área del siguiente triángulo.

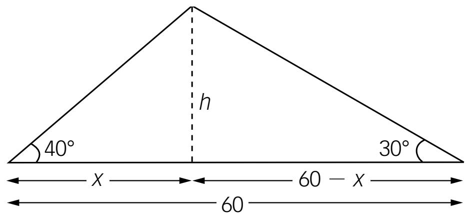
Trazamos la altura y, fijándonos en uno de los dos triángulos que se forman, hallamos *h* y la mitad de la base, $\frac{a}{2}$.



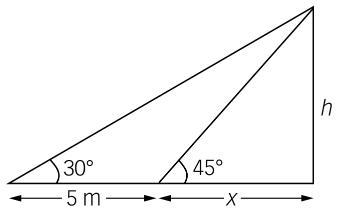
APLICAR LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Nombre: Curso: Fecha:

3 Calcula la altura h y las distancias x y $60 - x$ de la figura. Utiliza las tangentes de los ángulos de 40° y 30°.



4 Halla los valores de h y x.



5 Determina la altura del árbol que, visto desde dos posiciones, distantes 30 m entre sí, forma la siguiente figura.