

CLASIFICAR LOS EXPERIMENTOS. OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL

Nombre: Curso: Fecha:

- Un **experimento determinista** es aquel experimento en el que podemos predecir su resultado, es decir, sabemos lo que sucederá antes de realizarlo.

Por ejemplo:

- Si ponemos un recipiente con agua a calentar, conocemos que a 100 °C el agua hierve.
- Si un coche circula a 120 km/h tarda 2 horas en hacer un trayecto, y sabemos que habrá recorrido 240 km.

- Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado **no se puede predecir**, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, de antemano no conocemos el resultado que vamos a obtener.

Por ejemplo:

- Si lanzamos una moneda al aire, no podemos predecir si saldrá cara o cruz.
- Si lanzamos un dado de parchís, no podemos saber el número que saldrá.

ACTIVIDADES

- 1 Clasifica estos experimentos. En caso de que sean aleatorios, escribe un posible resultado.

Experimento	Determinista	Aleatorio	
Lanzar una moneda al aire		x	Sacar cara
Elevar un número al cuadrado			
Sacar una carta de una baraja española			
Medir la temperatura a la que se congela el agua			
Al lanzar un dado de parchís, sacar un número mayor que 4			

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por E .
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar al aire una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado de parchís	$E = \{1, 2, 3, 4, 5 \text{ y } 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6
	↑ Todos los resultados posibles	↑ Cada uno de los resultados posibles

- 2 Obtén el espacio muestral del siguiente experimento: determinar la suma de los puntos obtenidos al lanzar al aire dos dados de parchís.

OPERAR CON SUCESOS

Nombre: Curso: Fecha:

Una **operación entre sucesos** de un espacio muestral nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral. Las dos operaciones más importantes son la unión y la intersección de sucesos.

- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) que están en cualquiera de los sucesos A o B :

$$A \cup B = A \text{ unión } B$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes a los sucesos A y B :

$$A \cap B = A \text{ intersección } B$$

- Cuando dos sucesos no tienen ningún suceso elemental en común se dice que son **incompatibles**:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Cuando dos sucesos tienen algún suceso elemental en común se dice que son **compatibles**:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

- Dado un suceso A , el suceso **contrario** \bar{A} , está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, considera los sucesos:

$$A = \text{«Obtener un número menor o igual que 5»} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \text{«Obtener un número par»} = \{2, 4, 6\}$$

- a) Escribe el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de A y B .

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- b) Escribe el suceso intersección, formado por todos los sucesos comunes de A y B .

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

- c) Escribe el suceso contrario de A , formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

$$\bar{A} = \{6\}$$

- d) Escribe el suceso contrario de B , formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral que no están en B .

$$\bar{B} = \{1, 3, 5\}$$

Observa que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

$$A \cup \bar{A} = E$$

ACTIVIDADES

- 1 Considera el experimento de lanzar un dado de parchís y los sucesos: $A = \text{«Salir un número par»}$ y $B = \text{«Salir un número primo»}$. Escribe los sucesos A y B , y obtén los siguientes sucesos.

$$A = \{\text{---}, \text{---}, \text{---}\} \quad B = \{\text{---}, \text{---}, \text{---}\}$$

a) $A \cup B =$

e) $A \cap B =$

b) $\bar{A} =$

f) $\bar{B} =$

c) $A \cup \bar{B} =$

g) $A \cup \bar{B} =$

d) $\bar{A} \cap B =$

h) $A \cap \bar{B} =$

OPERAR CON SUCESOS

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

2 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.

A = «Salir un as»

B = «Salir bastos»

C = «No salir 7»

D = «Salir una figura».

Señala si las parejas de sucesos son compatibles, incompatibles o contrarias.

Suceso	Compatibilidad		Contrarios	
	Compatibles	Incompatibles	Sí	No
A y B				
B y C				
A y D				
B y D				

3 En una bolsa hay diez bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se consideran los sucesos.

A = «Sacar un número par»

B = «Sacar un número primo»

C = «Sacar un número mayor que 7»

Escribe los siguientes sucesos.

a) $A = \{ \text{_____} \}$

g) $A \cup B = \{ \text{_____} \}$

b) $B = \{ \text{_____} \}$

h) $A \cap B = \{ \text{_____} \}$

c) $C = \{ \text{_____} \}$

i) $A \cup C = \{ \text{_____} \}$

d) $\bar{A} = \{ \text{_____} \}$

j) $A \cap C = \{ \text{_____} \}$

e) $\bar{B} = \{ \text{_____} \}$

k) $\bar{A} \cup B = \{ \text{_____} \}$

f) $\bar{C} = \{ \text{_____} \}$

l) $\bar{A} \cap C = \{ \text{_____} \}$

4 Se lanzan dos dados de parchís y se consideran estos sucesos.

A = «Suma par»

B = «Suma menor que 9»

C = «Suma mayor que 10»

Escribe los siguientes sucesos.

a) $A = \{ \text{_____} \}$

g) $A \cup B = \{ \text{_____} \}$

b) $B = \{ \text{_____} \}$

h) $A \cap B = \{ \text{_____} \}$

c) $C = \{ \text{_____} \}$

i) $A \cup C = \{ \text{_____} \}$

d) $\bar{A} = \{ \text{_____} \}$

j) $A \cap C = \{ \text{_____} \}$

e) $\bar{B} = \{ \text{_____} \}$

k) $\bar{A} \cup B = \{ \text{_____} \}$

f) $\bar{C} = \{ \text{_____} \}$

l) $\bar{A} \cap C = \{ \text{_____} \}$

OBTENER LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y LA FRECUENCIA RELATIVA DE UN SUCESO

Nombre: _____

Curso: _____

Fecha: _____

- La **frecuencia absoluta** (f_i) de un suceso es el número de veces que aparece dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio n veces.
- La **frecuencia relativa** (h_i) de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se ha repetido el experimento: $h_i = \frac{f_i}{n}$

EJEMPLO

Hemos lanzado un dado 120 veces, obteniendo los resultados que aparecen en la tabla.

Cara	1	2	3	4	5	6	TOTAL
f_i	18	21	19	18	23	20	120
h_i	0,15	0,18	0,16	0,15	0,19	0,17	1

El número de veces que aparece cada cara es su *frecuencia absoluta*.

La *frecuencia relativa* se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

ACTIVIDADES

- 1 Se lanzan dos dados de parchís simultáneamente 120 veces, anotando cada vez la suma de las dos puntuaciones obtenidas. Los resultados aparecen en la siguiente tabla.

Cara	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	8	10	12	18	19	16	13	11	5	5
h_i											

- a) Completa la tabla, calculando las frecuencias relativas.
- b) Se consideran los sucesos: $A = \text{«Número múltiplo de 5»}$, $B = \text{«Número par»}$, $C = \text{«Número mayor que 6»}$.
Determina las frecuencias relativas de A , B y C .
- $$A = \{5, 10\} \quad h_A = h_5 + h_{10} = \text{_____} = \text{_____}$$
- $$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad h_B = h_2 + h_4 + h_6 + h_8 + h_{10} = \text{_____} = \text{_____}$$
- $$C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad h_C = h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11} + h_{12} = \text{_____} = \text{_____}$$
- c) Halla la frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$.
- $$A \cup B = \{5, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$
- $$h_{A \cup B} = \text{_____}$$
- $$A \cap B = \text{_____} \quad A \cap C = \text{_____}$$
- $$h_{A \cap B} = \text{_____} \quad h_{A \cap C} = \text{_____}$$
- $$A \cup C = \text{_____} \quad B \cup C = \text{_____}$$
- $$h_{A \cup C} = \text{_____} \quad h_{B \cup C} = \text{_____}$$

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Nombre: Curso: Fecha: **REGLA DE LAPLACE**

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es el cociente del número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles. Esta expresión es la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Las propiedades de esta regla son:

- La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- La probabilidad de un suceso imposible es 0. La probabilidad del suceso seguro es 1.
- La suma de las probabilidades de un suceso A y su contrario \bar{A} es igual a 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

- La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales asociados a un experimento aleatorio es 1. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

- Dados dos sucesos A y B del espacio muestral E :

- Si son **incompatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si son **compatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

EJEMPLO

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 4 bolas azules. Si extraemos una bola, halla:

- La probabilidad de que sea roja.
- La probabilidad de que no sea blanca.
- La probabilidad de que sea roja o azul.
- La probabilidad de que sea azul o blanca.

- Llamamos a los sucesos: $R = \text{«Sacar bola roja»}$, $B = \text{«Sacar bola blanca»}$ y $A = \text{«Sacar bola azul»}$.

Aplicando la regla de Laplace, la probabilidad de que la bola que salga sea roja es:

$$P(R) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{3}{10} = 0,3$$

- La probabilidad de que la bola no sea blanca (suceso \bar{B}) es:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{10} = 1 - 0,2 = 0,8$$

- La probabilidad de que la bola sea roja o azul es el suceso $R \cup A$.

Como sacar bola roja o azul son sucesos incompatibles (la bola es roja o azul, pero no puede ser roja y azul a la vez), la probabilidad es la suma de ambas probabilidades:

$$P(R \cup A) = P(R) + P(A) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$$

- Como sacar bola azul o blanca son sucesos incompatibles, la probabilidad pedida es:

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$$

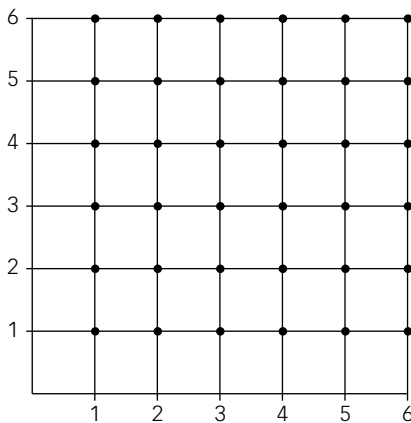
CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

1 Lanzamos dos dados de parchís y sumamos los puntos obtenidos. Como la probabilidad de sacar cualquier número en cada dado es la misma por ser sucesos equiprobables, halla:

- El espacio muestral, E .
 - La probabilidad de que la suma sea 6.
 - La probabilidad de que la suma no sea 6.
 - La probabilidad de que la suma sea mayor que 10 (la suma de la probabilidad de que sea 11 y la probabilidad de que sea 12).
- a) El espacio muestral está formado por todas las posibles combinaciones de las puntuaciones de los dos dados. Las representamos sobre un par de ejes, siendo cada combinación uno de estos puntos.



2 Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 6 bolas verdes y 3 bolas amarillas. Se sacan sin reemplazamiento 2 bolas, de las cuales la primera es verde. Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea:

- Amarilla
- Roja
- Verde
- Roja o verde

3 Si la extracción se hace con devolución, ¿cuáles son entonces las probabilidades anteriores?

HALLAR PROBABILIDADES EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Nombre: Curso: Fecha:

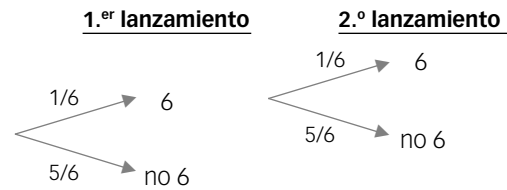
La probabilidad de un experimento compuesto se calcula a partir de las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

EJEMPLO

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos números 6 al lanzar dos dados de parchís?

Una forma de resolver el problema es aplicar directamente la regla de Laplace: de las 36 combinaciones posibles que pueden darse al tirar dos dados, únicamente es favorable el suceso (6, 6): $P(6, 6) = \frac{1}{36}$

Otra manera de resolver los problemas de probabilidades compuestas es construir un diagrama de árbol.



$$P(6, 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

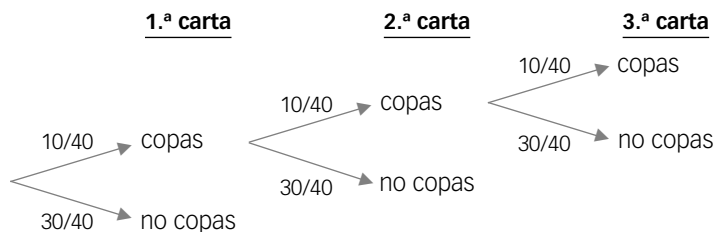
ACTIVIDADES

1 Halla la probabilidad de sacar tres cartas de copas, al extraer tres cartas de una baraja española.

a) Devolviendo la carta al mazo

b) Sin devolverla al mazo.

a) Formamos el diagrama en árbol, teniendo en cuenta que el número de cartas contenidas en el mazo son siempre 40, ya que en este caso se devuelven.



$$P(\text{copas, copas, copas}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1000}{64000} = \frac{1}{64}$$

b) Forma primero el diagrama de árbol, teniendo en cuenta que el número de cartas contenidas en el mazo disminuye cada vez, pues en este caso no se devuelven.

HALLAR PROBABILIDADES EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

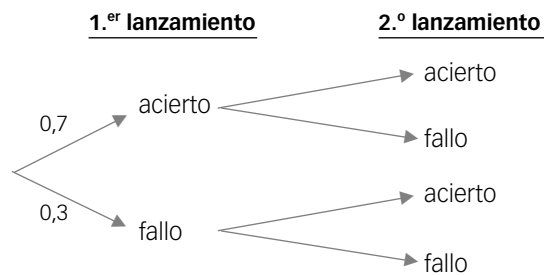
Nombre: Curso: Fecha:

2 En una clase hay 18 chicos y 22 chicas. Seleccionados al azar dos alumnos, construye un diagrama de árbol y halla:

- La probabilidad de que sean dos chicos.
- La probabilidad de que sean dos chicas.
- La probabilidad de que sean un chico y una chica.

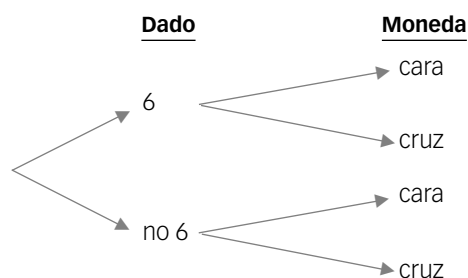
3 Un jugador de baloncesto lanza dos tiros libres. Sabiendo que suele encestar el 70% de los tiros que lanza y que falla el 30%, construye un diagrama de árbol y calcula:

- La probabilidad de que enceste los dos tiros.
- La probabilidad de que solo enceste uno.
- La probabilidad de que no enceste ninguno.



4 Lanzamos a la vez un dado y una moneda. Construye un diagrama de árbol y calcula:

- La probabilidad de que salgan un 6 y cara.
- La probabilidad de que no salgan un 6 y cruz.
- La probabilidad de que no salgan un 6 y cara.



CALCULAR PROBABILIDADES CONDICIONADAS

Nombre: Curso: Fecha:

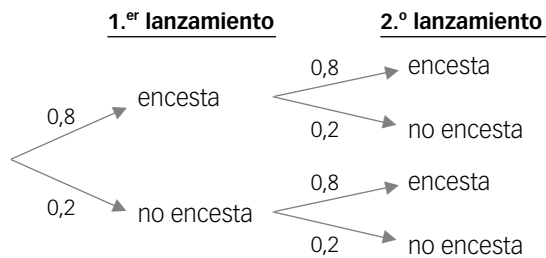
- Un suceso B está condicionado por otro suceso A , y se expresa B/A cuando sabemos que ha ocurrido el suceso A .
- La probabilidad de que ocurra $A \cap B$ es igual a la probabilidad de que ocurra el suceso A , multiplicada por la probabilidad de que ocurra el suceso B condicionado a A .

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

EJEMPLO

El marcador de un partido de baloncesto entre los equipos A y B está en 80-81, a falta de que un jugador del equipo A lance dos tiros libres. Si suele acertar el 80% de los lanzamientos, ¿cuál será la probabilidad de que enceste los dos tiros y gane A ? ¿Y de que falle los dos tiros y gane B ? ¿Y de que enceste uno y queden empatados?

Construimos el correspondiente diagrama de árbol:



Para que gane el equipo A es necesario encestar el segundo lanzamiento, siempre que se haya enceestado el primero. Esto se expresa así:

$$P(1.º \cap 2.º) = P(1.º) \cdot P(2.º/1.º)$$

Suponemos que la probabilidad de encestar en el 2.º lanzamiento es independiente de lo que haya ocurrido en el 1.º lanzamiento, y vale igual que en el primero, 80% = 0,8. En este caso resulta que:

$$P(1.º \cap 2.º) = P(1.º) \cdot P(2.º/1.º) = P(1.º) \cdot P(2.º) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$$

Hay un 64% de probabilidad de que gane el equipo A .

La probabilidad de que falle los dos lanzamientos será:

$$P(\text{no } 1.º \cap \text{no } 2.º) = P(\text{no } 1.º) \cdot P(\text{no } 2.º/\text{no } 1.º) = P(\text{no } 1.º) \cdot P(\text{no } 2.º) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

La probabilidad de que falle uno de los dos lanzamientos es:

$$P(\text{sí } 1.º/\text{no } 2.º) + P(\text{no } 1.º/\text{sí } 2.º) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,16 + 0,16 = 0,32$$

- Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de A no condiciona la probabilidad de B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dos sucesos A y B son **dependientes** si la realización de A condiciona la probabilidad de B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

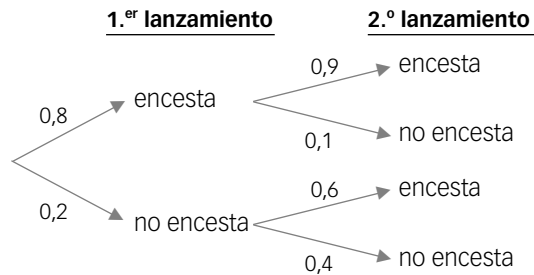
ACTIVIDADES

- Al sacar una carta de una baraja española y lanzar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de sacar copas y cruz? ¿Son sucesos dependientes o independientes?

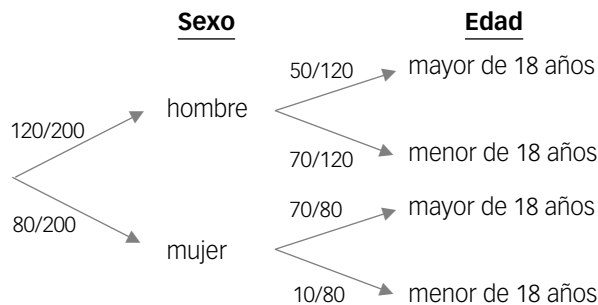
CALCULAR PROBABILIDADES CONDICIONADAS

Nombre: Curso: Fecha:

- 2** En el ejemplo anterior, la probabilidad de encestar en el segundo lanzamiento es distinta según se haya enceestado o no en el primer lanzamiento. Si ha enceestado el primero, la probabilidad del segundo lanzamiento es del 90%; pero si ha fallado el primero, la probabilidad del segundo lanzamiento es del 60%. Halla las probabilidades de que gane A, de que gane B o de que se produzca un empate.



- 3** En un club de tenis hay 200 socios, de los que 80 son mujeres. De ellas, 10 son menores de edad, mientras que de los hombres, hay 70 menores de edad. Calcula la probabilidad de que, elegido un socio al azar:
- Sea hombre.
 - Sea mujer y mayor de edad.
 - Sea hombre y menor de edad.
 - Sea mayor de edad (hombre o mujer).
 - Sea menor de edad (hombre o mujer).



REALIZAR TABLAS DE CONTINGENCIA

Nombre: Curso: Fecha:

Otra forma de resolver los problemas de probabilidad de sucesos simples y compuestos es a partir de una tabla de contingencia.

EJEMPLO

En una pandilla formada por 12 chicas y 8 chicos se forman dos grupos, uno para ir al cine y otro para ir al fútbol. Para ir al fútbol se apuntan 2 chicos y 9 chicas. Elegido uno de los 20 amigos al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol?
 c) ¿Y la probabilidad de que sea chico y vaya al cine?

Con los datos del enunciado construimos una tabla de doble entrada:

	Chicas	Chicos	TOTAL
Van al fútbol	9	2	11
Van al cine	3	5	9
TOTAL	12	8	20

- a) La probabilidad de que sea chica la obtenemos dividiendo el total de chicas (12) entre el total de amigos (20):

$$P(\text{chica}) = \frac{12}{20} = 0,6$$

- b) Para hallar la probabilidad de que sea chica y vaya al fútbol, observamos la tabla:

$$P(\text{chica e ir al fútbol}) = \frac{9}{20} = 0,45$$

- c) La probabilidad de que sea chico y vaya al cine es:

$$P(\text{chico e ir al cine}) = \frac{5}{20} = 0,25$$

ACTIVIDADES

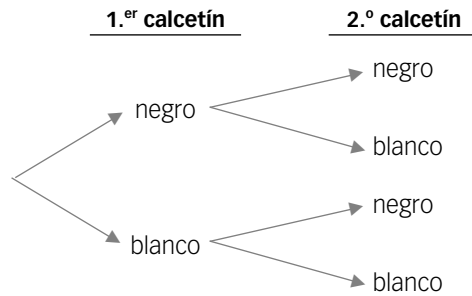
- 1 Resuelve el ejercicio 3 de la página anterior construyendo una tabla de contingencia.

	Hombres	Mujeres	TOTAL
Menores de 18 años	70	50	120
Mayores de 18 años	10	70	80
TOTAL	80	120	200

REALIZAR TABLAS DE CONTINGENCIA

Nombre: Curso: Fecha:

- 2** En un cajón hay 16 calcetines negros y 12 calcetines blancos. Halla, construyendo un diagrama de árbol, la probabilidad de que, al sacar dos calcetines al azar:
- Los dos sean negros.
 - Salga uno de cada color.
 - Ambos sean blancos.



- 3** En una clase hay 16 chicas y 14 chicos. Al preguntarles quién creen que va a ganar el partido Real Madrid-Barcelona, 9 chicas contestan que el equipo ganador será el Barcelona y 6 chicos creen que ganará el Real Madrid. Elegido un nombre cualquiera al azar, calcula la probabilidad de:
- Ser chica y partidaria del Barcelona.
 - Ser chico y partidario del Real Madrid.

- 4** En un banquete hay 28 hombres y 32 mujeres. Al elegir entre postre y café, toman postre 15 hombres y 20 mujeres. Elegida una persona al azar, determina la probabilidad de que:
- Sea mujer y tome café.
 - Tome postre (indistintamente de que sea hombre o mujer).