RECONOCER EL GRADO Y LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.

ACTIVIDADES

1 Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.

$$\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3}$$

$P(x) =$

- Tiene ______ términos.
- El término independiente es ______
- El grado del polinomio es ______
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ______

2 Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTAN LOS TÉRMINOS
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

2 Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:

a) Si el polinomio es ordenado.

b) Si el polinomio está reducido.

c) Si el polinomio es completo.

d) Su grado.

e) Su término independiente.

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor a sustituyendo a x:

Para $x = 2$:
$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomio cuando introducimos el valor 2 es 9.

Para $x = 10$:
$P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomio cuando introducimos el valor 10 es 201.

ACTIVIDADES

1 Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ ) = \boxed{} + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicada.

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS

Nombre: Curso: Fecha:

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1}$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \; Q(x) = & \phantom{3x^3 -{}} 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline \boldsymbol{P(x) + Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 + 2x^2 + 2x - 1} \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2}$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - \; 5x^2 \qquad + 5 \\ - \; Q(x) = & \qquad - \; (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline \boldsymbol{P(x) - Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 - 10x^2 + 2x - 2} \end{array}$$

ACTIVIDADES

1 Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

2 Calcula la suma y resta de estos polinomios.

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$- Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$- Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$- Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$- Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+ Q(x) =$
$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$- Q(x) =$
$P(x) - Q(x) =$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Solo se suman términos semejantes.

$$\mathbf{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}$$

ACTIVIDADES

1 Multiplica los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplica los monomios.

$$= \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} =$$

$$=$$

Suma los términos.

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

$$P(x) \cdot Q(x) =$$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{rr l}
P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 & \\
\times\ Q(x) = & x^2 + 3 & \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 & \leftarrow \textit{Producto de 3 por } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
+ & 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 \qquad & \leftarrow \textit{Producto de } x^2 \textit{ por } 7x^3, 2x^2, x, 7. \\
\hline
 & \boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21} & \leftarrow \textit{Suma de monomios semejantes.}
\end{array}$$

2 Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{rr}
P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times\ Q(x) = & 3x + 2 \\
\hline
\end{array}$$

← *Producto de 2 por $5x^2$, $3x$, 4.*

\+

← *Producto de $3x$ por $5x^2$, $3x$, 4.*

$P(x) \cdot Q(x) =$ ← *Suma de monomios semejantes.*

3 Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.

4 Halla el producto de los siguientes polinomios.

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

  La **división** es **exacta**.

  El polinomio ***P*(*x*) es divisible por *Q*(*x*)**.

- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad\qquad -25x & 5x + 3 \\ \hline 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad\qquad -25x & 5x + 3 \\ \hline \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ -\cancel{3x^2} \qquad\qquad -15 & \\ \hline -20x - 22 & \end{array}$$

Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $20x$, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

1 Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.

a) $P(x) = x - 1, Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1, Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6, Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, Q(x) = x$

2 Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1, Q(x) = x^3$

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

Nombre: Curso: Fecha:

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \overbrace{ab + ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\mathbf{(4x + y)} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

ACTIVIDADES

1 Desarrolla las siguientes igualdades.

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \overbrace{ab - ab} - b^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\mathbf{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 Desarrolla las igualdades.

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

Nombre: Curso: Fecha:

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}+b^2=a^2-b^2$$

EJEMPLO

$(3x+2)\cdot(3x-2)=9x^2-6x+6x-4=9x^2-4$

$(5x-3y)\cdot(5x+3y)=25x^2+15xy-15xy-9y^2=25x^2-9y^2$

ACTIVIDADES

3 Desarrolla los siguientes productos.

a) $(7x+x^4)\cdot(7x-x^4)=$

b) $(y+x^2)\cdot(y-x^2)=$

c) $(x+x^3)\cdot(x-x^3)=$

d) $(a^4-b)\cdot(a^4+b)=$

4 Desarrolla los productos.

a) $(x+5)^2=$

b) $(2y-7)^2=$

c) $(3xy+2yz)\cdot(3xy-2yz)=$

d) $(abc+1)^2=$

e) $(7-3x)^2=$

f) $(9v+2z)\cdot(9v-2z)=$

g) $(3xy+x^3)^2=$

5 Desarrolla.

a) $(4x+2)^2-(5x+1)\cdot(2x-3)=$

b) $(x+3)^2-(x-2)^2=$