HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NÚMEROS

Nombre: Curso: Fecha:

El máximo común divisor de dos números es el **mayor** de sus **divisores comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus divisores son:

Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

Divisores comunes = {1, 2, 3, **6**}

Luego el máximo común divisor de 12 y 42 es: m.c.d. (12, 42) = 6

¿CÓMO LO VAMOS A HALLAR?

Para hallar el máximo común divisor de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.
2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** de ambos, elevados al **menor exponente**.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad \text{m.c.d. } (12, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

ACTIVIDADES

1 Halla el máximo común divisor de estos números, descomponiendo en factores primos.

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = 3 \cdot 7$ $\qquad 105 = 3 \cdot \square \cdot \square$

m.c.d. $(21, 105) = \square \cdot \square = 21$

b) 33 y 44

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & — \\ — & — \\ 11 & — \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \cdot \square$ $\qquad 44 = 2^2 \cdot \square$

m.c.d. (33, 44) = 11

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ — & — \\ — & — \\ — & — \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ — & — \\ — & — \\ — & — \end{array}$$

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $\qquad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square = 30$

d) 45 y 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & — \\ — & — \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & — \\ — & — \\ — & — \\ — & — \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\qquad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.d. (45, 80) = 5

HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE DOS NÚMEROS

Nombre: Curso: Fecha:

El mínimo común múltiplo de dos números es el **menor** de sus **múltiplos comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus múltiplos son: Múltiplos de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, …}

Múltiplos de 42 = {0, 42, **84**, 126, …}

Luego el mínimo común múltiplo de 12 y 42 es: m.c.m. (12, 42) = 84

¿CÓMO LO VAMOS A HALLAR?

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** y **no comunes** a ambos que estén elevados al **mayor exponente**.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

m.c.m. (12, 42) = $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

ACTIVIDADES

1 Halla el mínimo común múltiplo de estos números, descomponiendo en factores primos.

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = \square \cdot \square$ $\qquad 105 = \square \cdot \square \cdot \square$

m.c.m. (21, 105) = $\square \cdot \square \cdot \square = 105$

b) 33 y 88

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 88 & 2 \\ 44 & — \\ — & — \\ 11 & — \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \cdot \square$ $\qquad 88 = 2^3 \cdot \square$

m.c.m. (33, 88) = $\square \cdot \square \cdot \square = 264$

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & — \\ 30 & — \\ 15 & — \\ 5 & — \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & — \\ 105 & — \\ 35 & — \\ 7 & — \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad 210 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.m. (60, 210) = $\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 420$

d) 45 y 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & — \\ — & — \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & — \\ — & — \\ — & — \\ — & — \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\qquad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.m. (45, 80) = $\square \cdot \square \cdot \square = 720$

REPRESENTAR NÚMEROS ENTEROS Y OPERAR CON ELLOS

Nombre: Curso: Fecha:

Representamos los números enteros positivos y negativos sobre una recta dividida en intervalos de la misma longitud.

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

EJEMPLO

Representa y ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros: 7, −1, −3, 5, 0, 1, 5, −7 y 2.

Los representamos sobre la recta:

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

Su ordenación es inmediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

ACTIVIDADES

1 Representa y ordena estos números enteros: −4, −5, 4, 5, −2, 2, −7 y 7.

2 Indica el signo < (menor que) o > (mayor que), según corresponda en cada caso.

a) $-5 > -7$ c) $5 \square 7$ e) $-3 \square 0$

b) $0 \square 9$ d) $-5 \square -1$ f) $4 \square 1$

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

- El valor absoluto de un entero positivo es él mismo: $|3| = 3$, $|0| = 0$
- El valor absoluto de un entero negativo es su opuesto: $|-3| = 3$, $|-15| = 15$

3 Opera y halla el valor absoluto de los números enteros.

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$

b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$

c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$

e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square)| = |\square| = \square$

4 Efectúa las siguientes operaciones con números enteros.

a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$

b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$

c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$

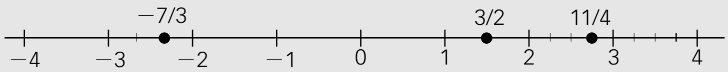
d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$

e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

REPRESENTAR NÚMEROS RACIONALES Y OPERAR CON ELLOS

Nombre: Curso: Fecha:

Representamos los números racionales sobre una recta, en la que los números fraccionarios están comprendidos entre los números enteros.



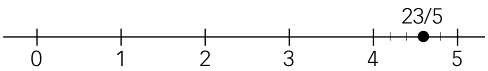
Para ver cómo se representa un número fraccionario mostramos un ejemplo. Así, para representar el número $\frac{138}{30}$ seguimos estos pasos.

1.° Simplificamos la fracción hasta obtener su fracción irreducible: $\frac{138}{30} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$

2.° Calculamos la parte entera y la parte decimal: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

3.° Tomamos sobre la recta el intervalo formado por los dos números enteros entre los que está comprendido el número, en este caso [4, 5], y lo dividimos en un número de partes igual que el denominador de la fracción, en este caso, en 5 partes.

Marcamos desde el número 4 tantas partes como indique el numerador, en este caso 3:



ACTIVIDADES

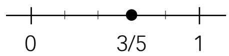
1 Representa los siguientes números fraccionarios.

a) $\frac{540}{900}$

1.º Simplificamos: $\frac{540}{900} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{3}{5}$

2.º Calculamos: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{}{}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, 1].
Lo dividimos en 5 partes iguales.
Marcamos 3 partes e indicamos la posición.

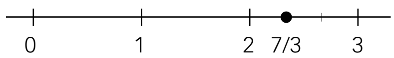


b) $\frac{420}{180}$

1.º Simplificamos: $\frac{420}{180} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{}{} = \frac{7}{3}$

2.º Calculamos: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{}{}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [2, 3].
Lo dividimos en 3 partes iguales.
Marcamos 1 parte e indicamos la posición.

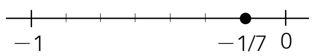


c) $-\frac{210}{1470}$

1.º Simplificamos: $-\frac{210}{1470} = -\frac{}{} = -\frac{}{} = -\frac{}{} = -\frac{1}{7}$

2.º Calculamos: $-\frac{1}{7} = 0 - \quad -\frac{1}{7}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, −1], y representamos la fracción.



REPRESENTAR NÚMEROS RACIONALES Y OPERAR CON ELLOS

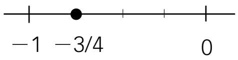
Nombre: Curso: Fecha:

d) $-\dfrac{450}{600}$

1.º Simplificamos: $-\dfrac{450}{600} = -\dfrac{\ }{\ } = -\dfrac{\ }{\ } = -\dfrac{\ }{\ } = -\dfrac{3}{4}$

2.º Calculamos: $-\dfrac{3}{4} = 0 - -\dfrac{3}{4}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, -1] y representamos la fracción.



SUMA (O RESTA) DE NÚMEROS RACIONALES

Para sumar (o restar) fracciones con **distinto** denominador, las reducimos a **común** denominador y luego sumamos sus numeradores.

EJEMPLO

Efectúa: $\dfrac{3}{5} - 2 + \dfrac{17}{3}$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m.c.m. (3, 5) $=$ 15

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \qquad 2 = \frac{2 \cdot 15}{15} = \frac{30}{15} \qquad \frac{17}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15}$$

$$\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3} = \frac{9}{15} - \frac{30}{15} + \frac{85}{15} = \frac{9 - 30 + 85}{15} = \frac{64}{15}$$

2 Realiza las siguientes operaciones.

a) $4 - \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}$ m.c.m. (2, 3) $=$

$$4 = \frac{4 \cdot \square}{\square} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{\ }{\ } - \frac{\ }{\ } - \frac{\ }{\ } = \frac{\ - \ - \ }{\ } = \frac{5}{6}$$

b) $\dfrac{5}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\right]$ m.c.m. (3, 4) $=$ 12

Efectuamos primero la suma del paréntesis:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \square}{12} + \frac{1 \cdot \square}{12} = \frac{\square + \square}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot \square}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\square - \square}{12} = \frac{29}{12}$$

c) $3 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$ m.c.m. (3, 5) $=$ 15

Efectuamos primero la resta del paréntesis:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{15} - \frac{1 \cdot \square}{15} = \frac{\square - \square}{15} = \frac{2}{15}$$

$$3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot \square}{15} - \frac{2}{15} = \frac{43}{15}$$

REPRESENTAR NÚMEROS RACIONALES Y OPERAR CON ELLOS

Nombre: Curso: Fecha:

PRODUCTO (O COCIENTE) DE NÚMEROS RACIONALES

- Para multiplicar dos fracciones, efectuamos el producto de los numeradores y lo dividimos entre el producto de los denominadores.
- Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLO

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{5}{21}$$

$$\frac{1}{3}:\frac{5}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5}:\frac{3}{1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

3 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{\square\cdot(\square)\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square}=\frac{}{}$

b) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{(-3)}{7}=\left(\frac{\square}{\square}\right)\cdot\frac{7}{(-3)}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot(-3)}=\frac{}{}$

c) $\left[3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:\left[(-5):\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\square\cdot\ (-2)}{\square}\right]:\left[(-5)\cdot\frac{2}{1}\right]=\left(\frac{}{}\right):\left(\frac{}{}\right)=\left(\frac{}{}\right)\cdot\left(\frac{}{}\right)=\left(\frac{}{}\right)=\frac{3}{100}$

d) $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{7}\right)\cdot\left(7:\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}\right)\cdot\left(7\cdot\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{}{}\right)\cdot\left(\frac{}{}\right)=\frac{}{}$

POTENCIA DE UNA FRACCIÓN

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

EJEMPLO

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}$$

4 Haz estas operaciones.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{}{}-\frac{}{}=\frac{\square-\square}{200}=\frac{\square-\square}{200}=\frac{667}{200}$

b) $5-\left(\frac{1}{3}\right)^3=5-\frac{1}{\square}=\frac{\square-\square}{27}=\frac{134}{27}$

c) $3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=3+\frac{}{}-\frac{}{}=\frac{\square+\square-\square}{36}=\frac{113}{36}$

REPRESENTAR NÚMEROS RACIONALES Y OPERAR CON ELLOS

Nombre: Curso: Fecha:

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS RACIONALES

La jerarquía de las operaciones es:

- Primero se hacen las operaciones de los paréntesis.
- Después, se calculan las potencias, si las hubiera.
- A continuación, se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, se resuelven las sumas y restas.
- Siempre se opera respetando el orden en que están escritas las operaciones, de izquierda a derecha.

EJEMPLO

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$$

Hay dos bloques, con los que debemos operar por separado:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

$$3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{42}{14}-\frac{2}{14}+\frac{7}{14}=\frac{42-2+7}{14}=\frac{47}{14}$$

Operamos y simplificamos:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{10}:\frac{47}{14}=\frac{17\cdot 14}{10\cdot 47}=\frac{238}{470}=\frac{119}{235}$$

5 Efectúa las operaciones.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{7-4}\right]=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=0$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{\square+\square}{3}\right)-\left(\frac{\square+\square}{4}\right)+\left(\frac{\square-\square}{12}\right)=\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=$

$$=\frac{\square-\square+\square}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

c) $\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{\square+\square}{7}}{\frac{\square+\square}{14}}=\frac{\quad}{7}\cdot\frac{14}{\quad}=\frac{308}{70}=\frac{154}{35}=\frac{22}{5}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{2}-\frac{\quad}{5}=\frac{\square+\square-\square}{30}=-\frac{16}{30}$

e) $\left(2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(4-\frac{2}{3}\right)=\frac{\quad}{5}\cdot\frac{\quad}{2}\cdot\frac{\quad}{3}=\frac{\quad}{5}\cdot\frac{\quad}{2}\cdot\frac{3}{\quad}=\frac{189}{100}$

EXPRESAR UN NÚMERO DECIMAL EN FORMA DE FRACCIÓN

Nombre: Curso: Fecha:

Para expresar un número fraccionario en **forma decimal** se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLO

a) $\dfrac{\mathbf{49}}{\mathbf{20}} = 2{,}45$ → decimal exacto

b) $\dfrac{\mathbf{86}}{\mathbf{11}} = 7{,}8181... = 7{,}\widehat{81}$ → decimal periódico puro

c) $\dfrac{\mathbf{87}}{\mathbf{66}} = 1{,}31818... = 1{,}3\widehat{18}$ → decimal periódico mixto

Para pasar un número en forma decimal a fracción, operamos de manera diferente en cada uno de los tres casos anteriores.

EJEMPLO

a) Decimal exacto:

$$2{,}4625 = \frac{24\,625}{10\,000} = \frac{4\,925}{2\,000} = \frac{985}{400} = \frac{197}{80}$$

b) Decimal periódico puro:

Se resta la parte entera

$$3{,}\widehat{45} = \frac{345 - 3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{114}{33} = \frac{38}{11}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica

Cifras de la parte entera y la parte decimal no periódica

c) Decimal periódico mixto:

$$3{,}21\widehat{7} = \frac{3\,217 - 321}{900} = \frac{2\,896}{900} = \frac{1\,448}{450} = \frac{724}{225}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica y tantos 0 como cifras tenga la parte anteperiódica

ACTIVIDADES

1 Obtén la fracción generatriz de los siguientes números.

a) $0{,}87 = \dfrac{87}{100}$

b) $0{,}\widehat{3} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{1}{3}$

c) $3{,}15\widehat{27} = \dfrac{31\,527 - 315}{9\,900} =$

$= \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad}$

d) $2{,}\widehat{45} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{27}{11}$

e) $0{,}0\widehat{15} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{1}{66}$

f) $-235{,}75 = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad}$

g) $6{,}\widehat{2} = \dfrac{\square - \square}{\square} = \dfrac{\quad}{\quad}$

APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Nombre: Curso: Fecha:

Para **truncar** las cifras decimales de un número hasta un orden determinado eliminamos las cifras que vienen a continuación de dicho orden.

EJEMPLO

5,751 truncado a las décimas es 5,7.
0,837 truncado a las centésimas es 0,83.
12,3146 truncado a las milésimas es 12,314.

ACTIVIDADES

1 Trunca los números decimales a la cifra de las décimas, centésimas y milésimas.

a) 0,2765	b) 12,34	c) 8,7521	d) 361,4938
0,2	______	______	______
0,27	______	______	______
0,276	______	______	______

Para **redondear** un número decimal hasta un orden determinado vemos si la cifra del siguiente orden es menor que 5 o mayor o igual que 5 y, en función de eso, dejamos la cifra anterior como está o la incrementamos en una unidad.

EJEMPLO

5,751 redondeado a las décimas es 5,8.
0,837 redondeado a las centésimas es 0,84.
12,3146 redondeado a las milésimas es 12,315.

2 Redondea los números decimales a las décimas, centésimas y milésimas.

a) 0,2765	b) 12,3453	c) 8,7521	d) 361,4932
0,3	______	______	______
0,28	______	______	______
0,277	______	______	______

3 Efectúa las operaciones con números decimales, y redondea el resultado a las centésimas.

a) $(1{,}367 + 4{,}875) \cdot 2 = \_\_\_\_\_\_ \cdot 2 = \_\_\_\_\_\_ = 12{,}48$

b) $(3{,}642 - 2{,}485) - (9{,}675 + 1{,}476) = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = -9{,}99$

c) $\left(\dfrac{43{,}764}{2{,}15} \cdot 3{,}831\right) - \left(\dfrac{74{,}772}{13{,}57} \cdot 5{,}63\right) = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = 46{,}96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} = \_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ = 1{,}39$

e) $\dfrac{35{,}732 - 20{,}189}{63{,}562 - 18{,}987} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0{,}35$

CALCULAR EL ERROR QUE COMETEMOS AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Nombre: Curso: Fecha:

El **error absoluto** que cometemos al aproximar un número decimal es igual al valor absoluto de la diferencia entre el número dado y el número aproximado. Se representa por E_a.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error absoluto se comete al aproximarlo a las centésimas?

Podemos aproximar el número de dos maneras: truncándolo o redondeándolo.

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57, y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

Si lo redondeamos a las centésimas, el número es 3,58, y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}58| = 0{,}0035$$

Como el error cometido al redondear es menor, esta forma de aproximación es mejor que el truncamiento.

ACTIVIDADES

1 Calcula el error que cometemos al aproximar los siguientes números decimales a las milésimas.

a) 35,3277

Por truncamiento queda 35,327.
$E_a = |35{,}3277 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0007$

Por redondeo queda 35,328.
$E_a = |\_\_\_\_\_\_ - 35{,}3277| = 0{,}0003$

b) 107,8912

Por truncamiento queda: ______
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

Por redondeo queda: ______
$E_a = |107{,}8912 - \_\_\_\_\_\_| = 0{,}0002$

El máximo error absoluto que cometemos al hacer una aproximación se llama **cota** o **margen de error**.

EJEMPLO

Al hallar con la calculadora el valor de $\sqrt{3}$, obtenemos:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Pero esta es una aproximación por redondeo que hace la calculadora a 7 cifras decimales, por lo que no es el valor exacto de $\sqrt{3}$.

Como no podemos hallar el error absoluto, al no conocer el valor exacto, vamos a calcular una cota del error absoluto cometido. Si aproximamos, por ejemplo, a las centésimas:

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$

El error que cometemos será menor o, como máximo, igual que la diferencia entre 1,73 y 1,74, es decir: $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

Así, resulta que 0,01 es una cota del error cometido al aproximar $\sqrt{3}$ a las centésimas.

2 Halla una cota de error al aproximar $\sqrt{3}$ a las milésimas.

$1{,}73\mathbf{2} < \sqrt{3} < 1{,}73\mathbf{3}$ $\qquad$ $1{,}73\mathbf{3} - 1{,}73\mathbf{2} = \_\_\_\_\_\_$

CALCULAR EL ERROR QUE COMETEMOS AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Nombre: Curso: Fecha:

3 Obtén la cota de error al aproximar los números a las décimas y a las centésimas.

a) $\frac{3}{7}$ $\frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots$

Para la aproximación a las décimas:

$$0{,}4 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}5 - 0{,}4 = \_\_\_\_$$

Para la aproximación a las centésimas:

$$0{,}42 < \frac{3}{7} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}43 - 0{,}42 = \_\_\_\_$$

b) $\frac{3}{11}$ $\frac{3}{11} = 0{,}272727$

Para la aproximación a las décimas:

$$0{,}2 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}3 - 0{,}2 = \_\_\_\_$$

Para la aproximación a las centésimas:

$$0{,}27 < \frac{3}{11} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$0{,}28 - 0{,}27 = \_\_\_\_$$

c) $2{,}3\overset{\frown}{5}$ $2{,}3\overset{\frown}{5} = 2{,}35555\ldots$

Para la aproximación a las décimas:

$$2{,}3 < 2{,}3\overset{\frown}{5} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las centésimas:

$$2{,}35 < 2{,}3\overset{\frown}{5} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$2{,}36 - 2{,}35 = 0{,}01$$

d) $\sqrt{7}$ $\sqrt{7} = 2{,}64575$

Para la aproximación a las décimas:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$\_\_\_\_ - \_\_\_\_ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las centésimas:

$$2{,}64 < \sqrt{7} < \_\_\_\_$$

luego la cota de error será:

$$2{,}65 - 2{,}64 = 0{,}01$$

El **error relativo** que cometemos al aproximar un número decimal es el cociente entre su error absoluto y el valor exacto de dicho número. Se representa por $\boldsymbol{E_r}$.

EJEMPLO

Sea el número 3,5765. ¿Qué error relativo se comete al aproximarlo por truncamiento a las centésimas? ¿Y a las milésimas?

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57, y el error absoluto E_a sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0065}{3{,}5765}\right| = 0{,}001817$

Si lo truncamos a las milésimas, el número es 3,576, y el error absoluto E_a sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}576| = 0{,}0005$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0005}{3{,}5765}\right| = 0{,}000139$

Otra forma de expresar el error relativo es mediante el tanto por ciento:

Para las centésimas: $E_r = 0{,}001817 = 0{,}18\,\%$ Para las milésimas: $E_r = 0{,}000139 = 0{,}01\,\%$

Hemos redondeado el error, para expresar el tanto por ciento (%) con dos cifras decimales.

CALCULAR EL ERROR QUE COMETEMOS AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Nombre: Curso: Fecha:

4 Halla el error relativo que cometemos al aproximar por truncamiento a las centésimas.

a) $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{7} = 0{,}71428\ldots$

El error absoluto será:

$$E_a = \left|\frac{5}{7} - 0{,}71\right| = \_\_\_\_\_\_$$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00428}{0{,}71428}\right| = 0{,}005992 = 0{,}60\,\%$$

b) $\frac{7}{9}$ $\frac{7}{9} = 0{,}77777\ldots$

El error absoluto será:

$$E_a = \left|\frac{7}{9} - 0{,}77\right| = \_\_\_\_\_\_$$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00777}{0{,}77777}\right| = 0{,}00999 = 1\,\%$$

c) $3{,}87\widehat{5}$ $3{,}87\widehat{5} = 3{,}87555\ldots$

El error absoluto será:

$$E_a = |3{,}87555 - 3{,}87| = 0{,}00555$$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00555}{3{,}87555}\right| = 0{,}001432 = \_\_\_\_\_\_\,\%$$

d) $\sqrt{7}$ $\sqrt{7} = 2{,}64575\ldots$

El error absoluto será:

$$E_a = |\sqrt{7} - 2{,}64| = 0{,}00575$$

El error relativo será:

$$E_r = \left|\frac{0{,}00575}{2{,}64575}\right| = 0{,}00217 = \_\_\_\_\_\_\,\%$$

5 Al medir varias veces con una cinta métrica, graduada en centímetros, la altura de un compañero de clase, hemos obtenido los siguientes valores.

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172

Calcula la media de estas medidas y el error relativo cometido.

El valor medio de estas medidas será:

$$\text{altura media} = \frac{177 + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{10} = \frac{1\,744}{10} = 174{,}4 \text{ cm}$$

El error absoluto cometido en cada una de las medidas lo obtenemos restando la media de cada medida y obteniendo su valor absoluto:

MEDIDAS	177	173	175	174	177	174	174	173	175	172
ERROR ABSOLUTO	$\lvert 177 - 174{,}4\rvert = 2{,}6$	$\lvert 173 - 174{,}4\rvert = 1{,}4$	0,6	0,4	2,6	0,4	0,4	1,4	0,6	2,4

La media de los errores absolutos será:

$$\frac{2{,}6 + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{10} = \frac{12{,}8}{10} = 1{,}28 = 1{,}3$$

La altura del compañero es: $174{,}4 \pm 1{,}3$ cm, y el error relativo cometido es:

$$\left|\frac{1{,}3}{174{,}4}\right| = 0{,}00745 = 0{,}75\,\%$$

RESOLVER PROBLEMAS CON PORCENTAJES

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

1 En un periódico local leemos que para el próximo puente el 38 % de las plazas hoteleras de la región están ya reservadas. Sabiendo que el número total de plazas es de 850, calcula las plazas que están ya reservadas y las plazas que quedan aún libres.

2 En un colegio juegan a baloncesto 169 alumnos, que representan el 26 % del total de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio? ¿Y cuántos no juegan a baloncesto?

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Para calcular en qué se transforma una cantidad C cuando aumenta o disminuye en un p %, se multiplica dicha cantidad por el índice de variación:

$C(1 + p/100)$, si aumenta.

$C(1 - p/100)$, si disminuye.

3 Para fomentar el uso del transporte público en una ciudad, se ha decidido rebajar un 7 % el precio del billete de autobús, que era de 0,80 €, y aumentar un 11 % el precio de 1 hora de aparcamiento, que era de 1,20 €. Calcula los nuevos precios del billete y del aparcamiento.

4 El año pasado en mi colegio había 72 alumnos que jugábamos al fútbol, pero este año somos 108 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?

RESOLVER PROBLEMAS CON PORCENTAJES

Nombre: Curso: Fecha:

Para calcular aumentos o disminuciones porcentuales sucesivos, se multiplican los índices de variación: $(1 + p)$ para los aumentos y $(1 - p)$ para las disminuciones.

EJEMPLO

A lo largo del año, la cifra de parados de una Comunidad ha ido variando según los siguientes aumentos y disminuciones porcentuales.

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
+2%	+3%	+4%	−2%	−1%	−3%	−5%	0%	0%	+3%	+3%	+2%

Si al comienzo del año había 380 000 parados en esa Comunidad, calcula los parados que hay al finalizar el año.

Hallamos en primer lugar los sucesivos índices de variación:

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1,02	1,03	1,04	0,98	0,99	0,97	0,95	1	1	1,03	1,03	1,02

Multiplicamos los sucesivos índices de variación:

$$1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 = 1{,}06$$

El número de parados al finalizar el año será: $380\,000 \cdot 1{,}06 = 402\,800$ personas

Ha aumentado un 6 %, como vemos por el índice de variación total.

5 La entrada de un cine cuesta 4,50 €, pero me aplican un descuento del 20 %. Como además es el día del espectador, me aplican un descuento adicional del 30 %. Calcula cuánto me cuesta la entrada ese día.

6 El precio de un modelo de coche ha experimentado las siguientes variaciones a lo largo de los últimos cinco años.

2004	2005	2006	2007	2008
+2,5%	+3%	0%	−1,5%	−2%

Si su precio en 2004 era de 15 000 €, calcula cuál será su precio en 2008.

CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE O EL INTERÉS COMPUESTO

Nombre: Curso: Fecha:

Si depositamos un capital C en una entidad bancaria que funciona con un tanto por ciento de interés r y retiramos periódicamente el beneficio obtenido, estamos ante un caso de **interés simple**, y se calcula así:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}, \text{ si el tiempo } t \text{ viene dado en años.}$$

EJEMPLO

Luis ingresa 200 € en una cuenta bancaria al 4 % de interés anual simple, y quiere saber cuánto dinero tendrá al cabo de dos años.

Podemos calcular el interés que le rentan 200 € al año aplicando una regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100\text{ €} \rightarrow 4\text{ € de interés en 1 año}\\ \text{por } 200\text{ €} \rightarrow x_1\text{ € de interés en el 1.}^{\text{er}}\text{ año}\end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 8\text{ €}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100\text{ €} \rightarrow 4\text{ € de interés en 1 año}\\ \text{por } 200\text{ €} \rightarrow x_2\text{ € de interés en el 2.º año}\end{array}\right\} \rightarrow x_2 = 8\text{ €}$$

Al final del primer año tendrá: $200 + 8 = 208$ € en la cuenta.

Al final del segundo año tendrá: $200 + 16 = 216$ € en la cuenta.

Habrá ganado 16 € en los dos años.

Otra forma más sencilla de calcular los intereses generados al cabo de los dos años es aplicando la fórmula:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 16\text{ €}$$

Y, por tanto, el capital acumulado es: $200 + 16 = 216$ €

ACTIVIDADES

1 Calcula cuánto tiempo ha de permanecer un capital de 600 € a un interés simple del 4% para que se duplique.

2 Calcula cuántos euros habría que ingresar y mantener durante 5 años en una cuenta, al 5% de interés simple, para que los intereses obtenidos a lo largo de los 5 años sean 100 €.

CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE O EL INTERÉS COMPUESTO

Nombre: Curso: Fecha:

Si los intereses generados durante el primer año (mes o día, dependiendo de cómo sea el tanto por ciento de interés) se suman al capital inicial, dando un nuevo capital sobre el que actuará el tanto por ciento de interés, estamos ante un caso de **interés compuesto**.

Para calcular el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital inicial C en t años al tanto por ciento anual r, aplicamos esta fórmula.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

El interés generado al cabo de esos t años será el capital final menos el capital inicial: $i = C_f - C$

EJEMPLO

Luis quiere saber si le conviene ingresar los 200 € en una cuenta joven al 4 % de interés anual compuesto, para lo cual necesita calcular cuánto dinero se habrá generado al cabo de 2 años y qué capital tendrá entonces.

Al final del 1.er año, el interés generado será de 8 € (igual que con el interés simple), pero sobre el capital, al final del 1.er año, se aplicarán los intereses, y será: $C_1 = C + i_1 = 200 + 8 = 208$ €.

Al final del 2.º año, el interés generado ese año es:

$$i_2 = 208 \cdot \frac{4}{100} = 8{,}32\text{ €}$$

Y el capital acumulado es: $C_2 = C_1 + i_2 = 208 + 8{,}32 = 216{,}32$ €

Así, los intereses generados en los dos años son: $i_1 + i_2 = 8 + 8{,}32 = 16{,}32$ €

Si aplicamos directamente la fórmula para este tipo de interés, tenemos que:

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 200 \cdot 1{,}04^2 = 216{,}32\text{ €}$$

Y los intereses generados son: $i = C_f - C = 216{,}32 - 200 = 16{,}32$ €

Por tanto, vemos que los intereses generados y el capital final al cabo de los dos años son mayores en la cuenta a interés compuesto. Esta diferencia se hace mayor cuantos más años transcurren.

Normalmente, las cuentas en bancos y cajas de ahorro funcionan a interés compuesto.

3 **Una persona abre una cuenta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto e ingresa 15 000 €, manteniéndolos durante 15 años.**

a) ¿Cuál será el capital final y qué intereses le habrán sido abonados al cabo de los 15 años?

b) ¿Y si mantiene ese dinero en la cuenta durante 20 años?