CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Nombre: Curso: Fecha:

Una **función de proporcionalidad directa**, se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = mx}$, siendo m un número cualquiera.

La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.

La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas viene representada por el número m, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forme con la horizontal.

Cuando entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es de tipo lineal.

EJEMPLO

Determina, a partir de los pares de valores de la tabla, si la relación entre las magnitudes que aparecen en ella es o no de proporcionalidad.

Entradas de cine	1	2	3	4	5	6
Importe (€)	4,50	9	13,50	18	22,50	27

El número de entradas y el importe que se abona son magnitudes directamente proporcionales, ya que si multiplicamos el número de entradas, multiplicaremos por el mismo número el dinero que hay que abonar.

La constante de proporcionalidad es:

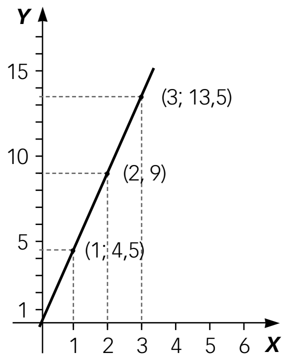
$$m = \frac{4,5}{1} = \frac{9}{2} = \frac{13,5}{3} = \frac{18}{4} = \ldots = 4,5$$

La expresión algebraica de la función que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = mx \;\rightarrow\; y = 4,5x$$

donde x es el número de entradas e y es el importe que se abona.

La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = 4,5$. Para representarla hay que señalar en un sistema de ejes de coordenadas los puntos: (1; 4,5), (2, 9), (3; 13,5), (4, 18)…



ACTIVIDADES

1 Un atleta ha recorrido las distancias que se muestran en la tabla en los tiempos que se indican.

Tiempo (min)	1	2	3	4
Recorrido (km)	0,2	1	1,6	2,4

Determina, a partir de estos pares de valores, si la relación entre ambas magnitudes es o no de proporcionalidad y, en caso de serlo, deduce la expresión algebraica de la función que las relaciona y represéntala.

FUNCIONES LINEALES

Nombre: Curso: Fecha:

Una **función lineal** +se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = mx + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

- m es la **pendiente** de la recta. Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta es **creciente**, y si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta es **decreciente**.
- n es la ordenada en el origen.

La representación gráfica de estas funciones es una **recta que no pasa por el origen de coordenadas**, sino que pasa por el punto $(0, n)$.

Las funciones de proporcionalidad directa son un caso particular de las funciones lineales, cuando $n = 0$.

EJEMPLO

Dadas las siguientes funciones: $\boldsymbol{y = 2x + 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = -x + 2}$

a) Determina su pendiente y su ordenada en el origen.

b) ¿Cómo serán las rectas, crecientes o decrecientes?

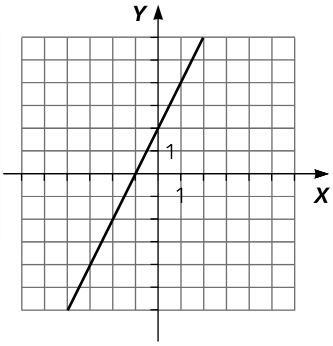
c) Construye su tabla de valores y represéntala.

a) $y = 2x + 2 \rightarrow m_1 = 2, n_1 = 2$

b) Al ser la pendiente positiva: $m_1 = 2 > 0$, la primera recta es creciente.

c)

x	y
0	2
1	4
-1	0
2	6

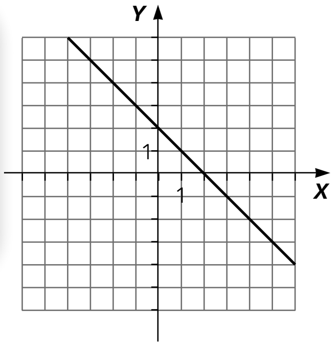


a) $y = -x + 2 \rightarrow m_2 = -1, n_2 = 2$

b) Al ser la pendiente negativa: $m_2 = -1 < 0$, la segunda recta es decreciente.

c)

x	y
0	2
1	1
-1	3
2	0



ACTIVIDADES

1 Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Escribe, en cada caso, el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen. Construye sus tablas de valores y represéntalas.

a) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Nombre: Curso: Fecha:

Para representar una recta hay que conocer dos puntos por los que pasa. Así, para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta $y = mx + n$ y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$
$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n) en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(-1, -2)$ y $B(2, 3)$.

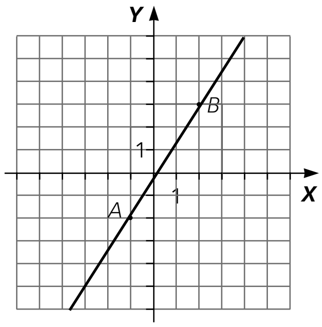
1.º Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$

2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen, sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$$y = mx + n \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot (-1) + n$$

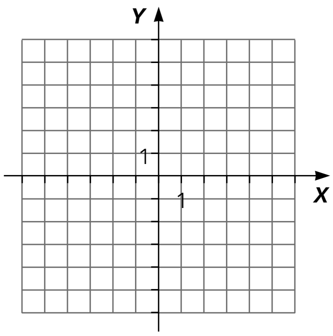
$$n = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6 + 5}{3} = \frac{-1}{3}$$



3.º Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación general: $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

ACTIVIDADES

1 Escribe y representa la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(0, 4)$ y $B(3, 1)$.



2 Obtén la ecuación de la recta que tiene por pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto $(0, 3)$.

3 Halla la ecuación de la recta que tiene por ordenada en el origen $n = -1$ y que pasa por el punto $(4, 5)$.

CONOCER LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2$

Nombre: Curso: Fecha:

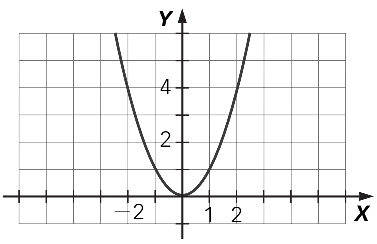
- Cuando $a > 0$, la gráfica de la función $y = ax^2$ es una parábola abierta hacia arriba (en forma de vaso). Cuando $a < 0$ es una parábola abierta hacia abajo (en forma de campana).
- En las parábolas de ecuación $y = ax^2$, el eje Y es su eje de simetría.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

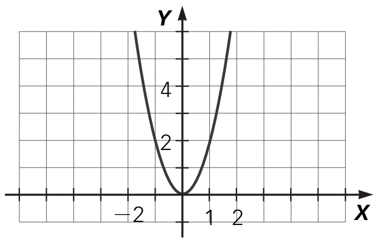
a) $y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



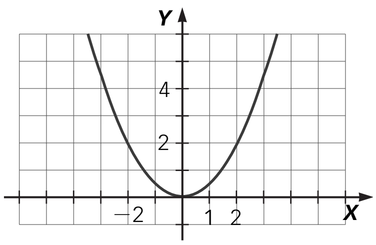
b) $y = 2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



c) $y = \frac{1}{2}x^2$

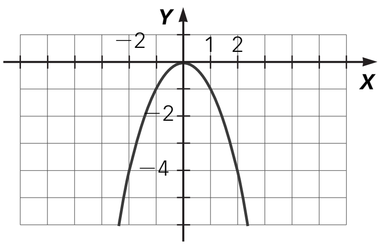
x	−2	−1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	4



Las tres parábolas tienen forma de vaso. Vemos que la parábola $y = 2x^2$ es más estrecha que la parábola $y = x^2$. En cambio, la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha que la parábola $y = x^2$.

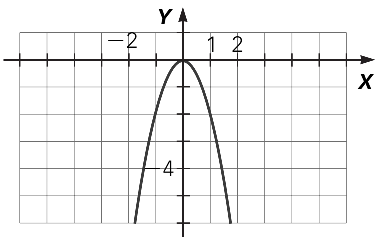
d) $y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4



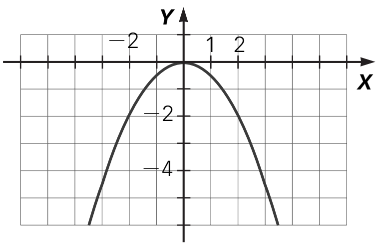
e) $y = -2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−3



f) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1/2	0	−1/2	−3



Estas tres parábolas son iguales que las anteriores, pero están abiertas hacia abajo, y tienen forma de campana.

ACTIVIDADES

1 Sin representarlas, di cuáles de las siguientes parábolas tienen forma de vaso o de campana y cuáles son más anchas o más estrechas que $y = x^2$.

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$ c) $y = 5x^2$ d) $y = -7x^2$ e) $y = \frac{5}{3}x^2$ f) $y = -9x^2$

EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

Nombre: Curso: Fecha:

TRASLACIONES VERTICALES

La gráfica de $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando verticalmente k unidades la gráfica de $y = x^2$.

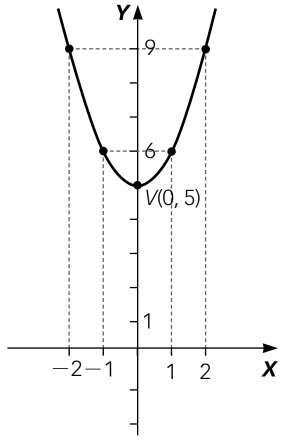
- Si $k > 0$, la traslación vertical es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación vertical es hacia abajo.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

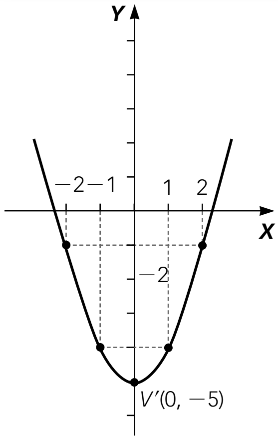
a) $y = x^2 + 5$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	6	5	6	9



b) $y = x^2 - 5$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-4	-5	-4	-1



La parábola $y = x^2 + 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = x^2 - 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia abajo.

El vértice de $y = x^2 + 5$ está en $V(0, 5)$, mientras que el vértice de $y = x^2 - 5$ está en $V'(0, -5)$. Así, el eje de simetría es igual en ambas gráficas: el eje Y, y pasa por el vértice de cada una de ellas.

ACTIVIDADES

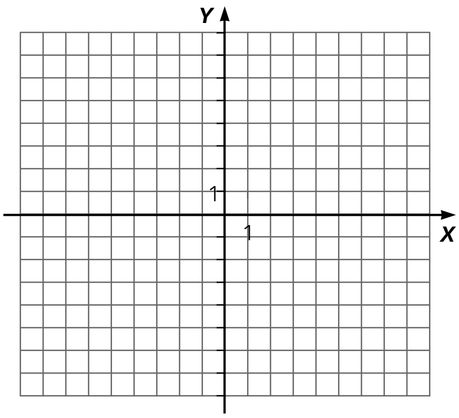
1 Representa sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.



EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

Nombre: Curso: Fecha:

TRASLACIONES HORIZONTALES

La gráfica de $y = (x + h)^2$ se obtiene trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = x^2$.

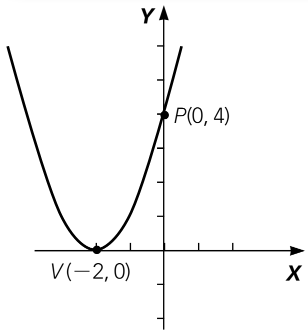
- Si $h > 0$, la traslación horizontal es hacia la izquierda.
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es hacia la derecha.

EJEMPLO

Representa las funciones.

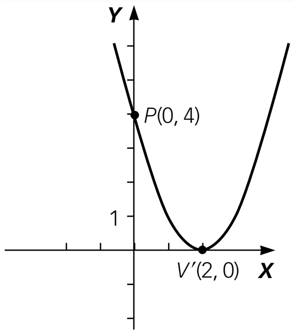
a) $y = (x + 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	4	9	16



b) $y = (x - 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	16	9	4	1	0



La parábola $y = (x + 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la izquierda, mientras que la parábola $y = (x - 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la derecha.

El vértice de $y = (x + 2)^2$ está en $V(-2, 0)$, mientras que el vértice de $y = (x - 2)^2$ está en $V'(2, 0)$. Así, el eje de simetría de la parábola $y = (x + 2)^2$ es la recta $x = -2$, mientras que el eje de $y = (x - 2)^2$ es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

ACTIVIDADES

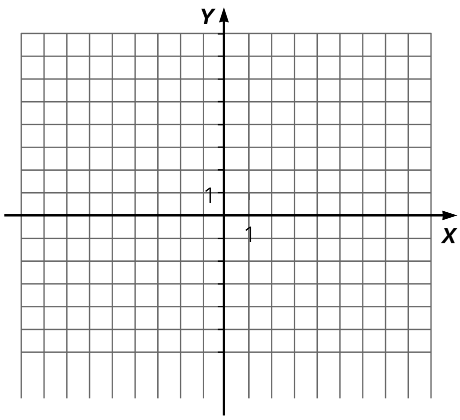
1 Representa sobre el mismo sistema de ejes, y con colores diferentes, las siguientes parábolas.

a) $y = (x - 1)^2$

b) $y = (x + 1)^2$

c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

Nombre: Curso: Fecha:

TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

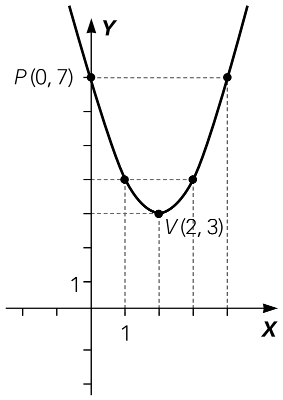
La gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ es una parábola como la gráfica de $y = x^2$, pero con el vértice en el punto (h, k).

EJEMPLO

Representa la función $y = (x - 2)^2 + 3$.

Obtenemos su tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



Si trasladamos la parábola $y = x^2$ en 2 unidades a la derecha se obtiene la parábola $y = (x - 2)^2$. Si a continuación trasladamos esta parábola en 3 unidades hacia arriba, obtenemos la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 + 3$.

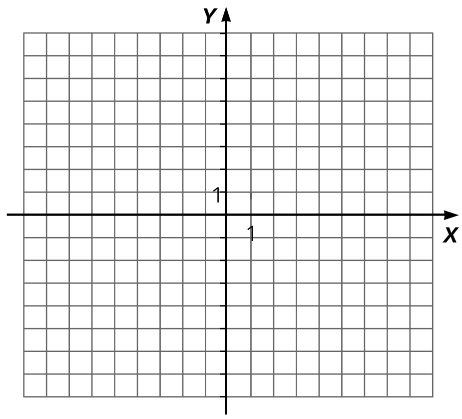
El vértice de $y = (x - 2)^2 + 3$ está en el punto $(h, k) = (2, 3)$.

Su eje de simetría es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

3 A partir de la parábola $y = x^2$, representa las siguientes parábolas sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, explicando cómo lo haces.

a) $y = (x + 2)^2 - 3$ b) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = (x - 3)^2 - 1$

Obtén las coordenadas de sus vértices y de su punto de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



REPRESENTAR LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2 + bx + c$

Nombre: Curso: Fecha:

Para representar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se siguen estos pasos:

1.º Se calculan los puntos de corte con el eje X. Después, se halla el punto de corte con el eje Y, si lo hubiera.

2.º Se halla el vértice, que tiene por abscisa $x = -\frac{b}{2a}$, y que es el valor que debe coincidir con la abscisa del punto medio entre los dos puntos de corte con el eje X.

EJEMPLO

Representa la función $y = 2x^2 - 9x - 18$.

1.º Calculamos los puntos de corte con el eje X, haciendo $y = 0$.

$$2x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son $P(6, 0)$ y $Q\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \rightarrow y = -18 \rightarrow R(0, -18)$.

2.º El vértice tendrá por abscisa el valor $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-9}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$.

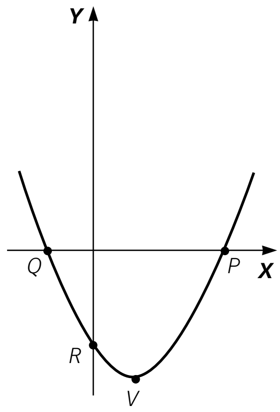
El valor de la ordenada y_V lo obtenemos sustituyendo el valor de x_V en la ecuación de la parábola:

$$y_V = 2x_V^2 - 9x_V - 18 = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{4} - 18 =$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 18 = \frac{81 - 162 - 144}{8} = -\frac{225}{8}$$

Así, el vértice es el punto $V\left(\frac{9}{4}, -\frac{225}{8}\right)$.

El eje de simetría de la parábola $y = 2x^2 - 9x - 18$ es la recta $x = \frac{9}{4}$.



ACTIVIDADES

1 **Representa las siguientes parábolas.**

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

b) $y = x^2 - 4x - 5$

CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Nombre: Curso: Fecha:

- Una función de proporcionalidad inversa se expresa de la siguiente forma.

$$xy = k \rightarrow y = \frac{k}{x}, \text{ siendo } k \neq 0.$$

- La representación gráfica de estas funciones es una hipérbola.
- Cuando entre dos magnitudes existe una relación de proporcionalidad inversa, la función que representa dicha relación es del tipo anterior.

EJEMPLO

Un coche que circula a una velocidad constante de 90 km/h tarda 2 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto habría tardado si hubiera ido a 120 km/h? ¿Y si hubiese circulado a 60 km/h?

Las dos variables relacionadas son la velocidad y el tiempo, ya que el espacio recorrido no varía. Construimos la siguiente tabla de valores entre ambas variables.

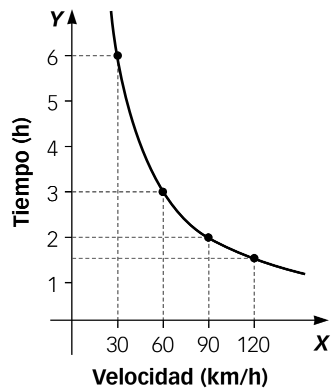
Velocidad (km/h)	30	60	90	120
Tiempo (h)	6	3	2	1,5

- Vemos que al duplicar la velocidad, el tiempo se reduce a la mitad; por tanto, ambas magnitudes, velocidad y tiempo, son inversamente proporcionales.
- La relación que cumplen ambas magnitudes es:

  $30 \cdot 6 = 60 \cdot 3 = 90 \cdot 2 = 120 \cdot 1{,}5 = 180 = k$
- La expresión algebraica de la función que relaciona la velocidad y el tiempo es:

  $vt = k \rightarrow vt = 180 \rightarrow t = \dfrac{180}{v}$

La representación gráfica de esta función es la rama del primer cuadrante de una hipérbola.



ACTIVIDADES

1 La siguiente tabla de valores corresponde a una función de proporcionalidad inversa.

a) Completa la tabla.

b) Escribe la expresión algebraica de la función.

c) Representa la función.

x	1	2	3	4	5	6
y			7/3			

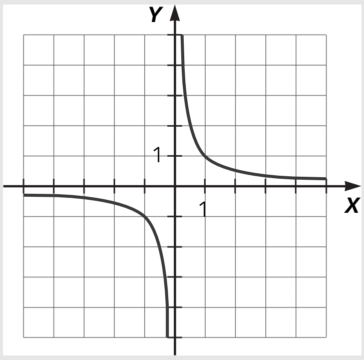
CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Nombre: Curso: Fecha:

Representa la función de proporcionalidad inversa $y = \frac{1}{x}$.

En este caso, la variable x también puede tomar valores negativos.
Construimos la tabla de valores.

x	1	−1	2	−2	3	−3
y	1	−1	1/2	−1/2	1/3	−1/3



Observa que x no puede tomar el valor 0, ya que no existe $\frac{1}{0}$.

2 Representa la función de proporcionalidad inversa $y = -\frac{1}{x}$, y compárala con la función del ejemplo anterior.

Las gráficas de $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$ son hipérbolas, simétricas respecto al eje X.

La gráfica de la función $y = \frac{1}{x} + k$, siendo k un valor constante, se obtiene trasladando verticalmente la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ hacia arriba (si $k > 0$) o hacia abajo (si $k < 0$) tantas unidades como sea el valor de k.

3 Representa las siguientes hipérbolas.

a) $y = \frac{1}{x} + 3$

b) $y = \frac{1}{x} - 3$