Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

1 Halla la suma de los *n* primeros números naturales.

2 En un examen las preguntas están ordenadas según su dificultad. La primera vale dos puntos y cada una de las siguientes vale tres puntos más que la anterior. Calcula el número de preguntas en cada caso:

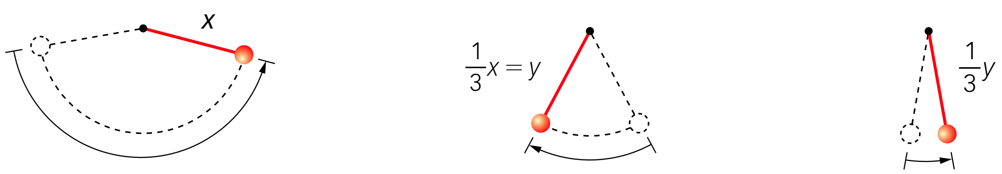
a) El total de puntos es 40.

b) El total de puntos es 100.

c) El total de puntos es 155.

3 Rosa recibe una gratificación al principio de cada trimestre de 1 000 €. Si el dinero lo va depositando en una entidad bancaria al 4 % de interés compuesto, ¿cuánto tendrá al acabar un año?

4 Esta es la trayectoria que lleva el péndulo de un reloj en cada uno de sus movimientos.



¿Qué distancia recorrerá el péndulo antes de pararse?

Nombre: Curso: Fecha:

5 Una bióloga está estudiando la evolución de una población de moscas.

a) Si el número inicial de moscas es de 50 y, cada 10 días, la población de moscas se cuadruplica, halla el término general de la progresión formada por el número de moscas cada 10 días.

b) ¿Cuántas moscas habrá a los 50 días?

c) Si el precio del alimento para las moscas en el primer día es de 1 €, y cada día aumenta 2 céntimos más, halla el término general de la progresión.

d) Determina el valor del alimento en el día 20.

e) Calcula el valor del alimento en los 40 primeros días.

6 Una familia hace un plan de ahorros durante 4 años ingresando, al principio de cada año, 3000 € a un 5 % anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero obtendrá al finalizar el plan?

1 **Halla la suma de los n primeros números naturales.**

Podemos considerar los n primeros números naturales como una sucesión aritmética en la que $a_1 = 1$ y $d = 1$. El término general sería:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) = n$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + n)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

2 **En un examen las preguntas están ordenadas según su dificultad. La primera vale dos puntos y cada una de las siguientes vale tres puntos más que la anterior. Calcula el número de preguntas en cada caso:**

a) El total de puntos es 40.

b) El total de puntos es 100.

c) El total de puntos es 155.

La puntuación de las preguntas viene dada por una sucesión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 3$. Su término general es $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1$.

Cuando nos dan la puntación total, lo que nos están dando es la suma de n términos y tenemos que averiguar n.

a) $40 = \dfrac{(2 + 3n - 1)n}{2} \rightarrow 3n^2 + n - 80 = 0$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80)}}{2 \cdot 3} \rightarrow n = 5$$

La solución negativa no se contempla pues no tiene sentido en este contexto.

b) $100 = \dfrac{(2 + 3n - 1)n}{2} \rightarrow 3n^2 + n - 200 = 0$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-200)}}{2 \cdot 3} \rightarrow n = 8$$

La solución negativa no se contempla pues no tiene sentido en este contexto.

c) $155 = \dfrac{(2 + 3n - 1)n}{2} \rightarrow 3n^2 + n - 310 = 0$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-310)}}{2 \cdot 3} \rightarrow n = 10$$

La solución negativa no se contempla pues no tiene sentido en este contexto.

3 **Rosa recibe una gratificación al principio de cada trimestre de 1 000 €. Si el dinero lo va depositando en una entidad bancaria al 4 % de interés compuesto, ¿cuánto tendrá al acabar un año?**

Tras 3 meses tendrá:

$$C_f = 1000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Después de 6 meses tendrá:

$$C_f = \left(1000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + 1000\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 1000 \cdot \left(\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 1000 \cdot \left(\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{2}{4}}\right) =$$

$$= 1000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}} + 1000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\frac{2}{4}}$$

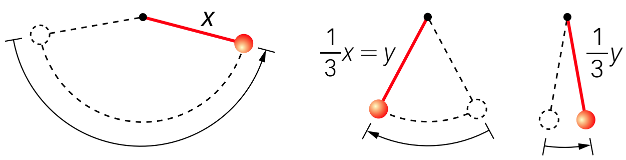
Esto es una suma de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1000 \cdot \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$ y $r = \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Un año son 4 trimestres y el resultado sería:

$$S_4 = \frac{1000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\left(1{,}04^{\frac{1}{4}}\right)^4 - 1\right)}{1{,}04^{\frac{1}{4}} - 1} = \frac{1000 \cdot 1{,}04^{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}04}{1{,}04^{\frac{1}{4}} - 1} =$$

$$= 4099{,}51 \text{ euros}$$

4 **Esta es la trayectoria que lleva el péndulo de un reloj en cada uno de sus movimientos.**



¿Qué distancia recorrerá el péndulo antes de pararse?

El recorrido del péndulo sigue una progresión geométrica en la que $a_1 = x$ y $r = \dfrac{1}{3}$.

La distancia que recorre el péndulo antes de pararse es la suma de todos los términos de la sucesión, que como $r < 1$, podemos calcularla.

$$s = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3x}{2}.$$

De modo que si por ejemplo $x = 1$ m, la distancia total que recurre el péndulo hasta que se para es $\dfrac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5$ metros.

5 Una bióloga está estudiando la evolución de una población de moscas.

a) Si el número inicial de moscas es de 50 y, cada 10 días, la población de moscas se cuadruplica, halla el término general de la progresión formada por el número de moscas cada 10 días.

b) ¿Cuántas moscas habrá a los 50 días?

c) Si el precio del alimento para las moscas en el primer día es de 1 €, y cada día aumenta 2 céntimos más, halla el término general de la progresión.

d) Determina el valor del alimento en el día 20.

e) Calcula el valor del alimento en los 40 primeros días.

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 50$ y $r = 4$
De modo que el término general es: $a_n = 50 \cdot 4^{n-1}$

b) Tras 50 días han pasado 5 grupos de 10 días, de modo que $a_5 = 50 \cdot 4^{5-1} = 12\,800$ moscas.

c) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 0{,}02$.
De modo que el término general es:
$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 0{,}02 = 0{,}02n + 0{,}98$

d) $a_{20} = 0{,}02 \cdot 20 + 0{,}98 = 1{,}38$ €

e) En este caso hay que sumar lo que vale el alimento de cada día durante los 40 primeros días:

$$a_{40} = 0{,}02 \cdot 40 + 0{,}98 = 1{,}78 \text{ €}$$

$$S_{40} = \frac{(1 + 1{,}78) \cdot 40}{2} = 55{,}60 \text{ €}$$

6 Una familia hace un plan de ahorros durante 4 años ingresando, al principio de cada año, 3000 € a un 5% anual de interés compuesto. ¿Cuánto dinero obtendrá al finalizar el plan?

Tras 1 año tendrá: $C_f = 3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^1$

Después de 2 años tendrá:

$$C_f = \left(3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 3000\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) =$$

$$= 3000 \cdot \left(\left(1 + \frac{5}{100}\right) + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) =$$

$$= 3000 \cdot \left(\left(1 + \frac{5}{100}\right) + \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2\right) =$$

$$= 3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$$

Esto es una suma de una progresión geométrica en la que $a_1 = 3000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ y $r = \left(1 + \frac{5}{100}\right)$

Lo obtenido tras 4 años es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica:

$$S_4 = \frac{3000 \cdot 1{,}05 \cdot \left((1{,}05)^4 - 1\right)}{1{,}05 - 1} = \frac{3000 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}22}{1{,}05 - 1} =$$

$$= 13\,860 \text{ euros}$$