# RECONOCER EL GRADO, LOS TÉRMINOS Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE DE UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

- Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número, llamado **coeficiente**, y una o varias letras elevadas a un número natural, que forman la **parte literal** del monomio.
- El **grado** de un monomio es el exponente de la letra que forma la parte literal, si solo hay una, o la suma de los exponentes, si hay más de una.
- Dos **monomios** son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

## ACTIVIDADES

**1** Completa la tabla.

| Monomio | Coeficiente | Parte literal | Grado |
|---|---|---|---|
| $5x^3$ | 5 | $x^3$ | 3 |
| $-2x^4$ | | | |
| $2x^3y$ | | | |
| $-xy$ | | | |

**2** Determina si son o no semejantes estos monomios.

a) $2x^3y^3$ y $2x^2y^3$

b) $2xy^2$ y $-7xy^2$

c) $x^3$ y $-14x^3$

**POLINOMIOS**

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios, que son los **términos** del polinomio. Al término que no tiene parte literal se le denomina **término independiente**.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido coincide con el grado de su término de mayor grado.

**3** Determina los términos, el término independiente y el grado.

| Polinomio | Términos | Término independiente | Grado |
|---|---|---|---|
| $P(x) = -4x^2 + 5x - 2$ | | | |
| $Q(x) = 2x^3 + 40$ | | | |
| $R(x) = -10x^2 - 20x + 40$ | | | |
| $S(x) = 40$ | | | |
| $T(x) = x^3 + x^2 + 1$ | | | |

 

# RECONOCER EL GRADO, LOS TÉRMINOS Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE DE UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

EJEMPLO

**Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:**

**a) Obtén el polinomio reducido.**

**b) Determina el grado del polinomio.**

**c) ¿Cuántos términos tiene el polinomio? ¿Cuál es su término independiente?**

a) Para reducir un polinomio hay que resolver las operaciones que se puedan:

$$P(x) = 5x^2 \underbrace{- 3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow \text{Polinomio reducido}$$

b) El grado del polinomio es 2: $P(x) = 5x^{2} - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y el número $-2$ es el término independiente.

$P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow -2$ es el término independiente.

$\longrightarrow$ Tiene tres términos.

**4** Calcula el polinomio reducido.

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

**5** Calcula el polinomio reducido y ordena sus términos de mayor a menor grado.

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$P(x) =$

- Tiene .......................... términos.
- El término independiente es ..........................
- El grado del polinomio es ..........................
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ..........................

**6** Reduce el polinomio y ordena sus términos de mayor a menor grado.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$

- Tiene .......................... términos.
- El término independiente es ..........................
- El grado del polinomio es ..........................
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ..........................

# DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

**VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO**

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo $x$ por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo, $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede dar cualquier valor a la $x$.

Para $x = 2 \rightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

El valor numérico del polinomio para $x = 2$ es 9.

Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 2 \cdot (10)^2 + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$

El valor numérico del polinomio para $x = 10$ es 201.

ACTIVIDADES

**1** Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$.

a) $P(x) = x + 1$

$x = 1 \rightarrow P(\ \ ) = (\ \ \ ) + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

**2** Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

 

# REALIZAR SUMAS Y RESTAS CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

## SUMAS Y RESTAS DE POLINOMIOS

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los coeficientes de los términos del mismo grado.
- La **resta** de dos polinomios se calcula restando los coeficientes de los términos del mismo grado.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar los términos del mismo grado.**

### EJEMPLO

**Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$.**

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos del mismo grado.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 \boxed{-\ 2x^2}\boxed{+\ 5x}\boxed{-\ 3}\boxed{+\ 4x^2}\boxed{-\ 3x}\boxed{+\ 2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos del mismo grado.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ +\ Q(x) = & \phantom{3x^3 - {}} 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

### EJEMPLO

**Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$.**

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5 - (5x^2 - 2x + 7) =$$

$$= 3x^3 \boxed{-\ 5x^2}\boxed{+\ 5}\boxed{-\ 5x^2} + 2x \boxed{-\ 7} = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos del mismo grado.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - \ \ 5x^2 \qquad + 5 \\ -\ Q(x) = & \qquad - \ (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

### ACTIVIDADES

**1** Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones en línea y en columna.

# REALIZAR SUMAS Y RESTAS CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

**2** Calcula la suma y resta de cada par de polinomios.

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\,Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\,Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\,Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\,Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\,Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\,Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\,Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\,Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\,Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\,Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

 

# REALIZAR MULTIPLICACIONES CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

**PRODUCTO DE POLINOMIOS**

- El **producto** de dos polinomios se halla multiplicando cada uno de los monomios de un polinomio por los monomios del otro, y sumando, después, los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

**Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.**

Vamos a resolverlo multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

*Se multiplican todos los monomios de un polinomio por los monomios del otro polinomio.*

$$\boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3}\ \boxed{+\ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3}\ \boxed{+\ x \cdot x^2 + x \cdot 3}\ \boxed{-\ 7 \cdot x^2 - 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 =$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

*Se suman los términos semejantes.*

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

ACTIVIDADES

**1** Multiplica los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$

*Multiplicamos los monomios.*

$\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}\ \boxed{-\phantom{xxxxxxxx}}\ \boxed{+\phantom{xxxxxxxx}}$

$=$

*Sumamos los términos semejantes.*

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

# REALIZAR MULTIPLICACIONES CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

EJEMPLO

**Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.**

Resolvemos el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & 7x^3 & +2x^2 & +x-7 & \\
 & & \times & & & x^2+3 & \\
\hline
 & & & 21x^3 & +6x^2 & +3x-21 & \leftarrow \textit{Producto de 3 por } 7x^3+2x^2+x-7 \\
 & 7x^5 & +2x^4 & +x^3 & -7x^2 & & \leftarrow \textit{Producto de } x^2 \textit{ por } 7x^3+2x^2+x-7 \\
\hline
P(x)\cdot Q(x) = & 7x^5 & +2x^4 & +22x^3 & -x^2 & +3x-21 & \leftarrow \textit{Suma de monomios semejantes}
\end{array}$$

**2** Multiplica los polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$.

$$\begin{array}{rl}
5x^2 - 3x + 4 & \\
\times \qquad 3x + 2 & \\
\hline
 & \leftarrow \textit{Producto de 2 por } 5x^2 - 3x + 4 \\
 & \leftarrow \textit{Producto de } 3x \textit{ por } 5x^2 - 3x + 4 \\
\hline
P(x)\cdot Q(x) = \boxed{\phantom{xxxxxxxx}} & \leftarrow \textit{Suma de monomios semejantes}
\end{array}$$

**3** Calcula el producto del polinomio $R(x) = x^3 - 1$ y el polinomio $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.

**4** Halla el producto de los siguientes polinomios.

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

 

# REALIZAR DIVISIONES CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

**DIVISIÓN DE POLINOMIOS**

- Lo primero que hay que tener en cuenta para dividir los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el del polinomio $Q(x)$.
- En estas condiciones, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

$\boldsymbol{P(x)}$ es el polinomio **dividendo**.

$\boldsymbol{Q(x)}$ es el polinomio **divisor**.

$\boldsymbol{C(x)}$ es el polinomio **cociente**.

$\boldsymbol{R(x)}$ es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:
  - La **división** es **exacta**.
  - El polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ **es divisible por** $\boldsymbol{Q(x)}$.
- En caso contrario, se dice que la división no es exacta.

EJEMPLO

**Divide los siguientes polinomios: $\boldsymbol{P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7}$ y $\boldsymbol{Q(x) = x^2 + 5}$.**

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

*Hay que elegir un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé $5x^3$:*

*$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.*

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad - 25x & 5x + 3 \\ \hline \qquad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

*Multiplicamos 5x por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2 + 5$), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.*

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} \qquad - 25x & 5x + 3 \\ \cline{1-1} \qquad \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ \qquad -\cancel{3x^2} \qquad - 15 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad - 20x - 22 & \end{array}$$

*Hay que buscar un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé $3x^2$, en este caso 3.*

*Multiplicamos 3 por $x^2 + 5$, cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.*

*Hay que buscar un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé 20x, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.*

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división no es exacta, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

# REALIZAR DIVISIONES CON POLINOMIOS

Nombre: Curso: Fecha:

ACTIVIDADES

**1** Calcula las divisiones de polinomios y señala si son exactas o enteras.

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

**2** Haz las divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

 

# IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

Nombre: Curso: Fecha:

**CUADRADO DE UNA SUMA**

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + \underbrace{a \cdot b + a \cdot b} + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$(4x + y)^2 = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

**1** Desarrolla estas igualdades.

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

d) $(4a + b^2)^2 =$

**CUADRADO DE UNA DIFERENCIA**

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - \underbrace{a \cdot b - a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$(x^2 - 2) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

**2** Desarrolla las siguientes igualdades.

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(2x - 3y)^2 =$

d) $(4x^3 - a^2)^2 =$

  

# IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

Nombre: Curso: Fecha:

**PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA**

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - \cancel{a \cdot b} + \cancel{a \cdot b} - b \cdot b = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(3x + 2) \cdot (3x - 2)} = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$\mathbf{(5x - 3y) \cdot (5x + 3y)} = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

**3** Desarrolla las siguientes igualdades.

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

**4** Desarrolla.

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

**5** Desarrolla las igualdades.

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

 

# FACTORIZAR UN POLINOMIO

Nombre: Curso: Fecha:

**Factorizar un polinomio** consiste en escribirlo como producto de sus polinomios divisores de menor grado.

Para factorizar un polinomio utilizamos técnicas como sacar factor común (cuando todos los términos tienen un divisor común), las igualdades notables y la regla de Ruffini

## EJEMPLO

**Factoriza estos polinomios:**

**a)** $P(x) = x^3 - 3x^2$ **b)** $Q(x) = 4x^2 + 8x + 4$ **c)** $R(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

a) Sacamos factor común $x^2$: $P(x) = x^2 \cdot (x - 3)$ y ya no lo podemos descomponer más.

b) Sacamos el 4 factor común: $Q(x) = 4 \cdot (x^2 + 2x + 1)$, la expresión entre paréntesis no sabemos si se puede descomponer más. Lo comprobamos bien calculando sus raíces, bien dividiendo por Ruffini o pensamos si es equivalente a alguna de las identidades notables, como es el caso: $Q(x) = 4 \cdot (x + 1)^2$.

c) Usamos Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | −6 |
| 1 | | 1 | 5 | 6 |
| | 1 | 5 | 6 | 0 |
| –2 | | −2 | −6 | |
| | 1 | 3 | 0 | |

Así $R(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

## ACTIVIDADES

**1** Factoriza las siguientes expresiones:

a) $P(x) = x^5 + 4x^4$ b) $Q(x) = 3x^{10} + 9x^9$ c) $R(x) = x^6 - 8x^7$

**2** Factoriza usando las identidades notables las siguientes expresiones:

a) $P(x) = 4x^2 + 4x + 1$ b) $Q(x) = 3x^2 - 18x + 27$ c) $R(x) = x^2 - 2xy + y^2$

**3** Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^4 - 8x^2$ b) $Q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ c) $R(x) = x^3 + 102x^2 + 120x - 8000$