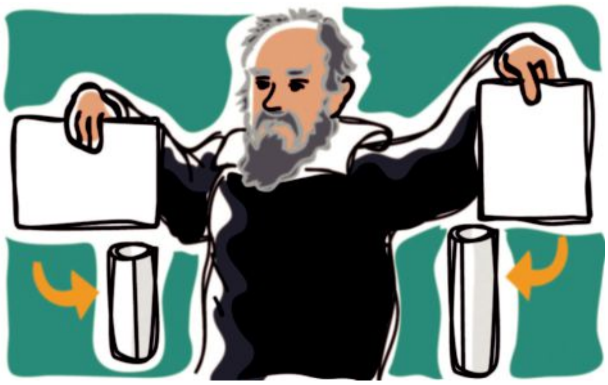
ACTIVIDADES

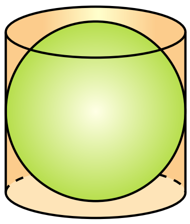
1 En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema:

«Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentido posibles, se obtienen dos cilindros distintos».

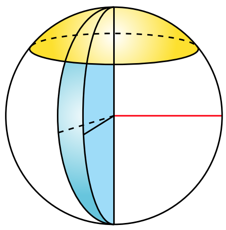
¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?



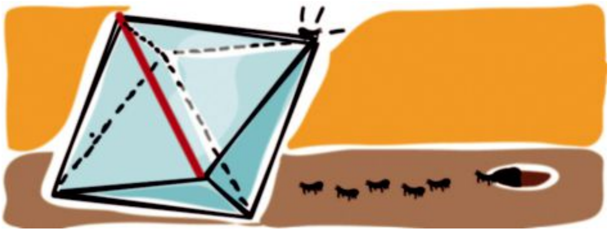
2 Si tenemos una esfera inscrita en un cilindro, calcula cuál es la diferencia de volúmenes entre la esfera y el cilindro en función del radio de la esfera.



3 Halla la altura de una zona esférica para que su área sea la misma que la de un huso esférico de 10° de amplitud, siendo el radio de la esfera asociada de 15 cm. ¿Y si el radio fuera de 30 cm? ¿Depende el resultado del radio de la esfera?



4 Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.



Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.

5 Una empresa que vende zumo en envases con forma de ortoedro, cuyas medidas son $11 \times 6 \times 15$ cm, decide cambiar dichos envases por otros con estas características:

- Disminuye un 10 % el área de la base.
- Aumenta un 10 % la altura.

a) El volumen del nuevo envase, ¿es mayor o menor que el del antiguo?

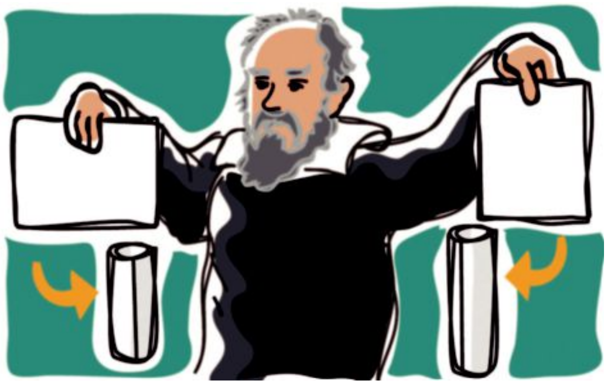
b) Si se mantiene el mismo precio, ¿es más rentable para el cliente el nuevo envase?

c) El precio del envase es 1,40 €. ¿Cuánto gana la empresa si envasa 99 000 litros de zumo al mes? ¿Y cuánto ganaba antes?

1 En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema:

«Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentido posibles, se obtienen dos cilindros distintos».

¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?



Sea x el lado más corto de la hoja e y el lado más largo.

El volumen para el cilindro cuya altura es el lado más corto es:

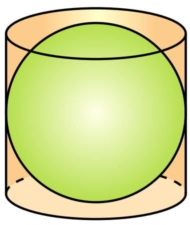
- El lado más largo da la longitud de la circunferencia de la base, de modo que: $y = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{y}{2\pi}$.
- El volumen es: $\pi \cdot \left(\dfrac{y}{2\pi}\right)^2 x = \dfrac{xy^2}{4\pi}$.

El volumen para el cilindro cuya altura es el lado más largo es:

- El lado más corto da la longitud de la circunferencia de la base, de modo que: $x = 2\pi r \rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$.
- El volumen es: $\pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 y = \dfrac{x^2 y}{4\pi}$.

Si comparamos estas dos cantidades, dado que $y > x$, tenemos que el primer cilindro tiene un volumen mayor.

2 Si tenemos una esfera inscrita en un cilindro, calcula cuál es la diferencia de volúmenes entre la esfera y el cilindro en función del radio de la esfera.

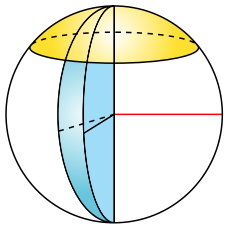


Sea x el radio de la esfera, que además coincide con el radio de la base del cilindro.

Además la altura del cilindro es el diámetro de la esfera, es decir $2x$.

$$V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}} = \pi x^2 \cdot 2x - \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$$

3 Halla la altura de una zona esférica para que su área sea la misma que la de un huso esférico de 10° de amplitud, siendo el radio de la esfera asociada de 15 cm. ¿Y si el radio fuera de 30 cm? ¿Depende el resultado del radio de la esfera?



$$A_{\text{zona esférica}} = 2\pi r h$$

$$A_{\text{huso esférico}} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360}$$

$$2\pi \cdot 15 \cdot h = \frac{4\pi 15^2 10}{360}$$

$$h = \frac{4\pi 15^2 \cdot 10}{360 \cdot 2\pi \cdot 15} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10}{360} = 0{,}83$$

Si el radio fuera 30 cm:

$$2\pi \cdot 30 \cdot h = \frac{4\pi 30^2 10}{360}$$

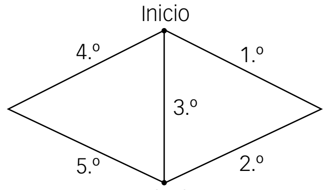
$$h = \frac{4\pi 30^2 \cdot 10}{360 \cdot 2\pi \cdot 30} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10}{360} = 1{,}67$$

El resultado sí depende del radio de la esfera.

4 Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.

Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.

Si consideramos los cuatro laterales del octaedro, cada punto final es el punto inicial del siguiente lateral.



Con el cubo no se puede hacer porque cada vértice es la intersección de tres aristas (no cuatro) y, al intentar recorrerlo, la segunda vez que la hormiga llegue a un vértice no podrá salir de él.

5 Una empresa que vende zumo en envases con forma de ortoedro, cuyas medidas son $11 \times 6 \times 15$ cm, decide cambiar dichos envases por otros con estas características:

- Disminuye un 10 % el área de la base.
- Aumenta un 10 % la altura.

a) El volumen del nuevo envase, ¿es mayor o menor que el del antiguo?

b) Si se mantiene el mismo precio, ¿es más rentable para el cliente el nuevo envase?

c) El precio del envase es 1,40 €. ¿Cuánto gana la empresa si envasa 99 000 litros de zumo al mes? ¿Y cuánto ganaba antes?

El área de la base es $6 \cdot 15 = 90$ cm^2, si se disminuye un 10 % queda en $90 - 9 = 81$ cm^2.

La altura aumenta un 10 %, de modo que pasará a ser: $11 + 1{,}1 = 12{,}1$ cm.

a) El volumen del antiguo envase era $11 \cdot 6 \cdot 15 = 990$ cm^3.

El volumen del nuevo envase es:
$12{,}1 \cdot 81 = 980{,}1$ cm^3

Es menor el volumen del envase nuevo.

b) Si se mantiene el mismo precio el nuevo envase no es más rentable para el cliente, ya que pagará lo mismo, pero obtendrá menos zumo.

c) $980{,}1$ cm^3 $= 0{,}9801$ dm^3 $= 0{,}9801$ litros

Para 99 000 litros, necesitan:
$99\,000 : 0{,}9801 = 101\,010$ envases

Cada envase 1,40, de modo que la empresa gana:
$1{,}4 \cdot 101\,010 = 141\,414$ euros.

ANTES

990 cm^3 $= 0{,}99$ dm^3 $= 0{,}99$ litros

Para 99 000 litros, necesitan:
$99\,000 : 0{,}99 = 100\,000$ envases

Cada envase 1,40, de modo que la empresa gana:
$1{,}4 \cdot 100\,000 = 140\,000$ euros